УДК 378.14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Л. А. Жидова, О. В. Зырянова, Ф. Холмухаммад

Томский государственный педагогический университет, Томск

Представлены результаты научно-исследовательской работы по изучению курса обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных в контексте компетентностного подхода в профессиональной подготовке будущего учителя математики. Как известно, модели реальных процессов могут быть описаны на математическом языке, в том числе посредством обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Умения составлять такие математические модели и работать с ними являются составной частью общей культуры человека. В связи с этим возникает необходимость поисков новых подходов к подготовке учителя математики, направленных на формирование представлений о роли моделей и моделирования. Представленные результаты позволяют сделать вывод о том, что приобщение обучающихся к научно-исследовательской работе в рамках курса дифференциальных уравнений способствует не только общему развитию и профессиональной подготовке будущего учителя математики, но и получению совершенно новых результатов, имеющих большое значение в современной теории дифференциальных уравнений, а также теоретической физике.

Ключевые слова: *профессиональная подготовка учителей математики, профессиональные компетенции, дифференциальные уравнения.*

Проблемам профессионального образования, в частности проблемам профессиональной подготовки учителей математики, в условиях непрерывного математического образования уделено повышенное внимание многими исследователями [1–4].

Современные школьные учебники, в частности учебник по алгебре для 7 класса А. Г. Мордковича [5], ориентированы на изучение математических моделей реальных процессов, которые описываются на математическом языке, в том числе в виде обыкновенных дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнений в частных производных. Ярким примером такого моделирования являются уравнения движения в классической механике – уравнения Ньютона. Кроме того, умения составлять математические модели реальных процессов и работать с ними являются составной частью общей культуры человека. Поэтому существует необходимость поисков новых подходов к подготовке учителя математики, направленных на формирование представлений о роли моделей и моделирования не только в математике, но и в физике, химии, биологии, экономике и т. д. Не только в классической механике, но и в других областях науки широко применяются математические модели, сформулированные на языке дифференциальных уравнений.

Курс дифференциальных уравнений играет большую роль в фундаментальной подготовке будущего учителя в плане понимания сущности прикладной и практической направленности обучения математике, овладения методом математического моделирования, формирования умения осуществлять межпредметные связи. Изучение курса дифференциальных уравнений и его методов дает еще один инструмент для познания мира, позволяет сформировать научное представление о реальном физическом пространстве.

Таким образом, курс дифференциальных уравнений имеет большое значение в деле приобщения обучающихся к научно-исследовательской работе, для формирования профессиональных компетенций будущего учителя математики и его становления в целом.

В данной статье представлены результаты научно-исследовательской работы по изучению курса обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Особое внимание уделено рассмотрению важного класса дифференциальных уравнений, известных в литературе как уравнения типа Клеро. Что касается описания общего решения уравнения Клеро, то здесь нет никаких принципиальных проблем – оно всегда описывается в терминах семейства линейных функций. Однако особый интерес представляют так называемые особые решения, для нахождения которых не существует общих методов, и поиск таких решений, в свою очередь, всегда представляет собой род искусства и изобретательности, во всяком случае, в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Этим, в частности, объясняется весьма скудный перечень в доступной научной литературе типов уравнений Клеро, для которых особые решения могут быть явно построены [6]. В данной работе будут рассмотрены уравнения Клеро с двумя независимыми переменами, когда правая часть имеет вид степенной функции произведения независимых переменных.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений уравнение Клеро

$$y - y'x = \psi(y') \tag{1}$$

принадлежит к классу уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Здесь $y = y(x)$ – неизвестная функция вещественной переменной х, $\psi(z)$ – представляет заданную функцию вещественной переменной z. Хорошо известным фактом является то, что общее решение этого уравнения представляет собой семейство линейных функций

$$y = Cx + \psi(C), \tag{2}$$

где С – произвольная вещественная константа. Кроме общего решения для уравнения Клеро (1) могут быть и особые (специальные) решения, если уравнение

$$x + \psi'(z) = 0 \tag{3}$$

имеет вещественное решение, выражающее переменную z как функцию x. Тогда

$$y = xz(x) + \psi(z(x)) \tag{4}$$

представляет собой особое решение уравнения Клеро (1).

В теории уравнений в частных производных рассматриваются дифференциальные уравнения вида

$$y - y'_i x^i = \psi(y'_1, y'_2, ..., y'_n), \tag{5}$$

где неизвестная функция y является функцией переменных $x^1, x^2, ..., x^n$, а $\psi(z_1, z_2, ..., z_n)$ представляет собой заданную функцию переменных $z_1, z_2, ..., z_n$. Уравнения вида (5) известны в теории уравнений в частных производных как уравнения типа Клеро [6–9]. Как и в случае уравнения Клеро (1), общее решение уравнения (5) описывается семейством линейных функций

$$y = C_i x^i + \psi(C_1, C_2, ..., C_n), \tag{6}$$

где C_i, $(i = 1, 2, ..., n)$ – произвольные вещественные постоянные. Если система следующих уравнений

$$x^i + \frac{\partial\psi(z_1, z_2, ..., z_n)}{\partial z_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{7}$$

имеет вещественные решения, выражающие величины z_i как функции переменных $x^1, x^2, ..., x^n$, то уравнение (5) имеет особое (специальное) решение

$$y = x^i\ z_i(x) + \psi\big(z_1(x), z_2(x), ..., z_n(x)\big), \tag{8}$$

где мы для краткости записи обозначили $z_i(x) = z_i(x^1, x^2, ..., x^n)$, $i = 1, 2, ..., n$.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда неизвестная функция ψ является функцией двух переменных z_1, z_2. В книге [6] рассмотрены частные случаи выбора функций ψ, когда уравнение типа Клеро (5) имеет особые решения. Приведем здесь ряд функций ψ, встречающихся в [6], которые представляют собой произведение $z_1 z_2$:

1) $\psi(z_1, z_2) = z_1 z_2$; (9)
2) $\psi(z_1, z_2) = 3(z_1 z_2)^{1/3}$.

В данной работе рассмотрим случай, когда функция ψ имеет вид

$$\psi(z_1, z_2) = \beta(z_1 z_2)^{\alpha}, \tag{10}$$

где α, β – произвольные вещественные числа, не равные нулю, чтобы исключить тривиальный случай уравнения (5). Выбор функции является обобщением частных случаев в (10), отвечающих выбору в виде

$$\alpha = 1, \beta = 1 \text{ и } \alpha = 1/3, \beta = 3.$$

При выборе (10) система уравнений (7) принимает вид

$$\begin{cases} x^1 + \alpha\beta z_2 (z_1 z_2)^{\alpha-1} = 0 \\ x^2 + \alpha\beta z_1 (z_1 z_2)^{\alpha-1} = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Несложные алгебраические выкладки приводят к следующему результату

$$(z_1 z_2)^{2\alpha-1} = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} x^1 x^2$$

$$x^1 z_1 = -\alpha\beta(z_1 z_2)^{\alpha} \tag{12}$$
$$x^2 z_2 = -\alpha\beta(z_1 z_2)^{\alpha}$$

и, как следствие, к особому решению уравнения (5), в этом случае

$$y = (\beta - 2\alpha\beta)\left(\frac{1}{(\alpha\beta)^2} x^1 x^2\right)^{\alpha/2\alpha-1}; \quad 2\alpha - 1 \neq 0. \tag{13}$$

При $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и $\alpha = 1/3$, $\beta = 3$ из (13) следуют известные результаты [5]:

– при $\alpha = 1$, $\beta = 1$: $y = -x^1 x^2$,
– при $\alpha = 1/3$, $\beta = 3$: $y = 1/x_1 x_2$.

Найденное в данной работе решение (13) уравнение типа Клеро со специальной правой частью (10) рассматриваем как новый результат в теории дифференциальных уравнений в частных производных.

В заключение следует отметить, что приобщение обучающихся к научно-исследовательской работе в рамках курса дифференциальных уравнений способствует не только общему развитию и профессиональной подготовке будущего учителя математики, но и получению совершенно новых результатов, имеющих большое значение в современной теории дифференциальных уравнений, а также теоретической физике [10].

Список литературы

1. Харина Н. В. Профессиональное образование в России: проблемы, пути решения // Научно-педагогическое обозрение (Pedagogical Review). 2013. Вып. 1 (1). С. 8–15.
2. Салехова Л. Л., Зарипов Ф. Ш., Хуснетдинова Д. М. Проектирование основной образовательной программы подготовки будущих учителей математики и информатики на основе ФГОС // Материалы Всеросс. научно-практ. конф. с междунар. участием «Математическое образование в школе и вузе в условиях перехода на новые образовательные стандарты». 2010. С. 152–155.

3. Золотцева В. В., Козлова Л. Н. Система активных методов обучения и развитие профессиональной компетентности // Среднее профессиональное образование. 2007. № 4. С. 28–31.
4. Жидова Л. А. Умения критического мышления как средство повышения качества профессиональной подготовки будущих учителей математики // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (TSPU Bulletin). 2009. Вып. 4 (82). С. 42–45.
5. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс: в 2 ч. Ч. 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2013. 175 с.
6. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Наука, 1966. 260 с.
7. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
8. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 1965. 512 с.
9. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М.: Физматлит, 2003. 416 с.
10. Lavrov P. M., Merzlikin B. S. Legendre transformations and Clairaut-type equations // Physics Letters. B756. 2016. P. 188–193.

Жидова Любовь Александровна, кандидат педагогических наук, доцент, Томский государственный педагогический университет (ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061). E-mail: gidovala@yandex.ru

Зырянова Ольга Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Томский государственный педагогический университет (ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061). E-mail: zyryanova@tspu.edu.ru

Фирдавси Холмухаммад, магистрант, Томский государственный педагогический университет (ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061). E-mail: shm94fs94@gmail.com

Материал поступил в редакцию 21.09.2016.

DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE PROFESSIONAL TRAINING OF MATHEMATICS TEACHER

L. A. Zhidova, O. V. Zyrianova, F. Kholmukhammad

Tomsk State Pedagogical University, Tomsk, Russian Federation

The paper presents the results of research on the study of the course of ordinary differential equations and partial differential equations in the context of the competency approach to training future math teachers. As is known, models of real processes can be described in the language of mathematics, including by means of ordinary differential equations and partial differential equations. Ability to create such mathematical models and work with them is an integral part of the human culture. Thereby it is necessary to search for new approaches to the training of maths teachers, aimed at the formation of ideas about the role of models and modeling. In this connection the course of differential equations is essential means in attracting students to research work and for the formation of professional competence of the future teacher of mathematics. The course of differential equations plays a fundamental role in the professional training of mathematics teacher in terms of understanding the gist of the application and the practical orientation of teaching mathematics, mastery of the method of mathematical modeling. The course of differential equations and its methods give another tool for knowledge of the world, which allows to create a scientific understanding of the real physical space. The results presented in the paper allow us to conclude, that the involvement of students in research work in the framework of the course of differential equations not only promotes the overall development and professional training of the future teacher of mathematics, but also getting completely new results are important in the modern theory of differential equations and theoretical physics.

Key words: *professional training of future maths teacher, professional competence, differential equations.*

References

1. Kharina N. V. Professional'noye obrazovaniye v Rossii: problemy, puti resheniya [Vocational education in Russia: problems and solutions]. *Nauchno-pedagogicheskoye obozreniye – Pedagogical Review*, 2013, no. 1, pp. 8–15 (in Russian).
2. Salekhova L. L., Zaripov F. Sh., Khusnetdinova D. M. Proektirovaniye osnovnoy obrazovatel'noy programmy podgotovki budushchikh uchiteley matematiki i informatiki na osnove FGOS [Design of basic educational training program for future teachers of mathematics and computer science on the basis of the FSES]. *Materialy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem "Matematicheskoye obrazovaniye v shkole i vuze v usloviyakh perekhoda na novye obrazovatel'nye standarty"* [Materials of All-Russian scientific-practical conference with international participation "Mathematics education in schools and universities in the transition to new educational standards"]. 2010. pp. 152–155 (in Russian).
3. Zolottseva V. V., Kozlova L. N. Sistema aktivnykh metodov obucheniya i razvitiye professional'noy kompetentnosti [The system of active methods of training and development of professional competence]. *Sredneye professional'noye obrazovaniye - Secondary Vocational Education,* 2007, no. 4, pp. 28–31 (in Russian).

4. Zhidova L. A. Umeniya kriticheskogo myshleniya kak sredstvo povysheniya kachestva professional'noy podgotovki budushchikh uchiteley matematiki [Abilities of critical thinking as a tool to raise the quality of professional training of future mathematics teachers]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – TSPU Bulletin*, 2009, no 4 (82), pp. 42–45 (in Russian).
5. Mordkovich A. G. *Algebra: 7 klass: v 2 ch. Ch. 1: uchebnik dlya uchashchikhsya obshcheobrazovatel'nykh uchrezhdeniy* [Algebra. Grade 7: in 2 parts. Part 1: textbook for students of educational institutions]. Moscow, Mnemozina Publ., 2013. 175 p. (in Russian).
6. Kamke Dr. E. *Differentialgleichungen lösungsmethoden und lösungen Partielle differentialgleichungen erster ordnung für eine gesuchte funktion*, Leipzig, 1959, 260 p. (Russ. Ed.: Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka: per. s nem. Moscow, Nauka Publ., 1966. 260 p.).
7. Kurant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1964. 830 p. (in Russian).
8. Stepanov V. V. *Kurs differentsial'nykh uravneniy* [The course of differential equations]. Moscow, Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1965. 512 p. (in Russian).
9. Zaytsev V. F., Polyanin A. D. *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka* [Reference book on differential equations in partial derivatives]. Moscow, Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury Publ. 2003. 416 p. (in Russian).
10. Lavrov P. M., Merzlikin B. S. Legendre transformations and Clairaut-type equations. *Physics Letters.* B756. 2016. pp. 188–193.

Zhidova L. A., Tomsk State Pedagogical University (ul. Kievskaya, 60, Tomsk, Russian Federation, 634061).
E-mail: gidovala@yandex.ru

Zyrianova O. V., Tomsk State Pedagogical University (ul. Kievskaya, 60, Tomsk, Russian Federation, 634061).
E-mail: zyryanova@tspu.edu.ru

Kholmukhammad F., Tomsk State Pedagogical University (ul. Kievskaya, 60, Tomsk, Russian Federation, 634061).
E-mail: shm94fs94@gmail.com