А.И. Забарина, Г.Г. Пестов

ОБ ОДНОЙ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Томский государственный педагогический университет

УДК 519.4

Введение

Со времен Кантора фундаментом математики стала теория множеств. Основная идея канторовой теории множеств – это идея актуальной бесконечности: бесконечное множество рассматривается как завершенное, существующее со всеми своими элементами. Идее актуальной бесконечности противостоит идея потенциальной бесконечности: бесконечное множество мыслится как строящееся, порождающееся некоторым процессом.

Борьбу этих концепций бесконечного можно проследить на протяжении всей истории математики. Так, Гаусс был решительным противником использования актуальной бесконечности в математике.

Во второй половине нашего века математики предпринимают попытки изменить фундамент математики – теорию множеств. Так возникла теория внутренних множеств, нестандартный анализ во многих вариантах. Сюда же относится и альтернативная теория множеств Вопенки.

Основная установка Вопенки – критика идеи актуальной бесконечности.

Теория множеств Вопенки [1] была задумана как альтернатива канторовой теории множеств с ее актуальной бесконечностью, чем и объясняется ее название. Поэтому построение модели альтернативной теории множеств в рамках теоретико-множественной модели нестандартного анализа Закона–Робинсона [2, 4], т.е. в конечном счете средствами классической теории множеств, выглядит несколько парадоксально.

Тем не менее такого рода модели могут быть полезны хотя бы тем, что позволяют использовать интуицию, накопленную в процессе работы с нестандартной моделью теории множеств, для лучшего осмысления альтернативных теорий [5].

Отметим некоторые отличия альтернативной теории множеств Вопенки от канторовой теории множеств.

1. В альтернативной теории различаются совокупности трех видов: множества, классы и полумножества.
2. Все бесконечные множества равномощны.
3. Каждое множество конечно по Кантору (т.е. каждое множество равномощно некоторому начальному отрезку множества натуральных чисел).

В качестве интуитивного оправдания этих понятий своей теории множеств Вопенка приводит такие, возможно шутливые, примеры. Совокупность человекообразных предков человека (не являющихся, следовательно, людьми) есть полумножество, не являющееся множеством. Они образуют подкласс множества приматов. В альтернативной теории множеств каждое множество, линейно упорядоченное некоторым отношением ρ (где ρ, в свою очередь, есть множество), обладает тем свойством, что каждое его непустое подмножество имеет наибольший и наименьший элементы. Если бы совокупность наших человекообразных предков была множеством, то существовала бы последняя обезьяна, т.е. обезьяна, ребенок которой был бы человеком, что противоречит здравому смыслу. Аналогичные рассуждения применимы и к совокупности всех живущих в данный момент людей.

Существуют аксиоматизации альтернативной теории множеств [2, 3]. Мы, однако, будем исходить из неформального подхода, изложенного в [1]. Нашей целью является построение модели теории множеств, близкой к альтернативной теории множеств Вопенки, средствами нестандартного анализа. В рамках этой модели основные понятия и факты альтернативной теории множеств Вопенки, на наш взгляд, становятся более естественными.

Конструкции универсумов

Обозначим через N множество всех конечных ординалов (по фон Нойману). Каждый элемент этого множества является конечным множеством.

Построим суперструктуру конечных множеств над N. Обозначим через $PF(A)$ множество всех конечных подмножеств множества A. Положим:

$$W_0(\mathrm{N}) = \mathrm{N}, ..., W_{n+1}(\mathrm{N}) = W_n \bigcup PF(W_n), \dots$$

Множество $W(\mathrm{N}) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W_n(N)$ назовем суперструктурой конечных множеств. Множество $W_n(\mathrm{N})$ назовем n-тым этажем суперструктуры $W(\mathrm{N})$.

Построим обычную суперструктуру над N со своими этажами:

$$V_0(\mathrm{N}) = \mathrm{N}, ...V_{n+1}(\mathrm{N}) = V_n \bigcup P(V_n), \dots$$

$$V(\mathrm{N}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n(N),$$

где $P(A)$ есть булеан множества A. Пусть F есть свободный ультрафильтр над N. Если $A \in V(\mathrm{N})$ то через $^*A$ обозначим ультрастепень A по ультрафильтру F.

$$^*W(\mathrm{N}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*W_n(N), \; ^{**}V(\mathrm{N}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*V_n(N).$$

Обозначим:

Построим суперструктуру над *N – внешний универсум $V(^*\mathrm{N})$. Индукцией по номеру этажа строим, как обычно [4], вложение j универсума $^*V(\mathrm{N})$ во внешний универсум $V(^*\mathrm{N})$. Тем самым мы и получим вложение универсума $^*W(\mathrm{N})$ во внешний универсум.

Как обычно, образ множества $V(^*\mathrm{N})$ при отображении j назовем внутренним универсумом. Каждый элемент из $V(^*\mathrm{N})$ мы отождествляем с его j-образом. Это можно сделать, поскольку отображение j отношения равенства и принадлежности по ультрафильтру F переводит в отношения равенства и принадлежности в теоретико-множественном смысле.

По построению, имеют место включения:

$^*V_n(\mathrm{N}) \supseteq {}^*W_n(\mathrm{N}), {}^*V(N) \supseteq {}^*W(\mathrm{N})$.

Множества, полумножества, классы

Рассмотрим теперь множество $U(\mathrm{N})$ всех подмножеств универсума $^*W(\mathrm{N})$.

Элементы множества $^*W(\mathrm{N})$ назовем *множествами*, элементы (N) – *классами*. Классы, не являющиеся множествами, назовем *собственными классами*.

Приведем пример множества. Пусть $\nu \in \mathrm{N}$. Обозначим:

$[0, \nu] = \{n \in \mathrm{N} \mid 0 \le n \le \nu\}$.

По построению $W(\mathrm{N})$, $\forall \nu \in \mathrm{N}([0,\nu] \in W(\mathrm{N}))$. По принципу переноса: $\forall \nu \in \mathrm{N}([0,\nu] \in W(\mathrm{N}))$. Следовательно, [0, ν] есть множество.

Классы A и B назовем *равномощными*, если существует биекция $f: A \to B$, где $f \in W(^*\mathrm{N})$. Если биекция – внутренняя, т.е. $f \in {}^*V(\mathrm{N})$, то эти классы назовем *внутренне равномощными*. Классы равномощные, но не внутренне равномощные, назовем *внешне равномощными*.

Класс, равномощный классу N, назовем, как обычно, *счетным*.

Для каждого множества A существует такое $\nu \in {}^*\mathrm{N}$, что *A равномощно множеству* [0, ν].

Каждое множество можно линейно упорядочить с помощью некоторого внутреннего бинарного отношения.

В самом деле, пусть $A \in W(\mathrm{N})$. Тогда для некоторого натурального k имеем: $A \in W_k(\mathrm{N})$. Обозначим количество элементов множества A через $\nu \in \mathrm{N}$. Из построения $W(\mathrm{N})$ легко следует, что найдется такое $s \in \mathrm{N}$, что для каждого $A \in W_k(\mathrm{N})$ существует биекция $f: A \to [0,\nu], f \in W_s(\mathrm{N})$.

Итак, $\forall A \in W_k(N) \exists \nu \in \mathrm{N} \exists f \in W_s$ (f есть биекция A на [0, ν]).

Последнее утверждение легко записывается на языке первого порядка. По принципу переноса получаем: $\forall A \in {}^*W_k(\mathrm{N}) \exists \nu \in {}^*\mathrm{N} \exists f \in {}^*W_s(\mathrm{N})$ (N) (f есть биекция A на [0, ν]).

Отсюда следует, что естественный линейный порядок с [0, ν] переносится на A с помощью внутренней биекции, следовательно, на A задается внутренний линейный порядок.

Если множество линейно упорядочено внутренним отношением r, то каждое непустое его подмножество имеет первый и последний элементы относительно этого порядка.

Доказательство получаем, аналогично предыдущему, по принципу переноса.

Никакой счетный класс не является множеством.

Это следует из того факта, что множество [0, ν], $\nu \in {}^*\mathrm{N}$ *или конечно, или несчетно* [6].

Приведем пример класса, не являющегося множеством. Имеем: $\mathrm{N} \subset W^*N$ следовательно, $\mathrm{N} \in U(\mathrm{N})$, N есть класс. В то же время N не имеет наибольшего элемента. Итак, N не есть множество.

Подкласс множества называется *полумножеством*. Полумножество называется *собственным*, если оно не является множеством.

Так как $\mathrm{N} \subset [0, \nu]$ и [0, ν] есть множество, то N есть собственное полумножество.

Класс, включающий собственное полумножество, называется *бесконечным*.

Каждое бесконечное множество включает счетное полумножество.

В самом деле, пусть A есть бесконечное множество. Так как A – множество, то для некоторого $\nu \in {}^*\mathrm{N}$ имеем: существует биекция $f \in {}^*W(\mathrm{N})$ множества A на [0, ν]. Ясно, что $\nu \in {}^*\mathrm{N} \backslash \mathrm{N}$, иначе A не включало бы собственного полумножества. Но тогда $\mathrm{N} \subseteq [0, \nu]$, и прообраз B класса N при отображении f есть счетный подкласс множества A. Значит, B есть счетное полумножество, входящее в A.

Все бесконечные множества внешне равномощны.

В самом деле, пусть A, B – бесконечные множества. По предыдущему, A равномощно [0, ν], B равномощно [0, ν_1], где $\nu, \nu_1 \in {}^*\mathrm{N} \backslash \mathrm{N}$. Но все множества [0, ν], где $\nu \in {}^*\mathrm{N} \backslash \mathrm{N}$, внешне равномощны [6]. Следовательно, равномощны и множества A и B.

Каждый счетный класс есть собственное полумножество.

Пусть A есть счетный (и, следовательно, собственный) класс. Тогда существует биекция $f: \mathrm{N} \to A, f \in V(^*\mathrm{N})$. Итак, $A = f(\mathrm{N}) \in V(^*\mathrm{N})$. Поэтому существует такое n натуральное, что $A \subset V_n(^*\mathrm{N})$. Так как А – класс, то $A \subset {}^*W$ (N). Значит, $A \subset {}^*W_n(\mathrm{N})$.

Итак, A есть полумножество.

Собственный класс, равномощный некоторому множеству, есть полумножество.

Доказательство аналогично предыдущему, только в роли N выступает теперь некоторое множество из универсума $^*W(\mathrm{N})$.

Литература

1. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. М.: Мир,1983.
2. Proceedings of the 1st symposium «Mathematics in the internal Set Theory». Bratislava, 1989.
3. Mattes J. // Axiomatic approaches to nonstandard analysis. Jahrbuch der Kurt Goedel Geselschaft. 1992. P. 61–79.
4. Robinson A., Zakon E. A set-theoretical characterization of enlargements, in Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and probability; W. A. J. Luxemburg (ed.), Holt, Rinehart and Winston. New York, 1969. P. 109–122.
5. Chang S.S., Keisler H.G. Model theory, 3rd edn, North-Holland. Amsterdam, 1990.
6. Галанова Н.Ю. О конфинальности *N. Региональная научно-практическая конференция: Естественные науки. Томск, 1994. С. 74.

В.В. Бордунов, А.С. Ситников**, В.А. Ситников***, В.С. Дмитриев**, Г.Н. Гладышев**, М.Л. Белявин**, И.А. Соболев*, С.В. Бордунов*, О.Л. Васильева****

БЫТОВЫЕ СИСТЕМЫ ОЧИСТКИ, УВЛАЖНЕНИЯ, ОБЕСПЫЛИВАНИЯ И ОБЕЗЗАРАЖИВАНИЯ ВОЗДУХА

*Институт химии нефти СО РАН

**Томский политехнический университет

***Томский государственный педагогический университет

УДК 697.942.001.2

Общеизвестно, что постоянно растущая индустриализация, компьютеризация, использование и переработка огромного количества химических веществ приводят воздушную среду обитания человека в производственных, общественных и домашних условиях к серьезному загрязнению самыми различными веществами антропогенного происхождения и микроорганизмами. Эти загрязнения отрицательно влияют на организм человека, вызывая различные заболевания. Поэтому можно считать состояние воздушной среды обитания человека и животных категорией экономической. Такой подход к ней уже осознали в развитых странах и принимают серьезные меры по очистке воздуха в производственных помещениях и жилье.

В настоящей работе описаны исследования в части разработки, изготовления и реализации размерного ряда устройств для очистки и регулирования состава воздуха (очистка, увлажнение, наполнение отрицательными аэроионами, лекарствами, ароматизаторами и т.д.); проанализированы доступные источники по этой проблеме. Приведено в историческом ракурсе становление некоторых биологических и технических решений. Рассмотрены основные конструктивные элементы очистителей воздуха: фильтры, устройства нагнетания воздуха, генераторы отрицательных аэроионов, распылители и компоновка очистителей наиболее известных фирм.

Не выделяя отдельно экономический аспект (стоимость очистителей и их элементов), тем не менее там, где имеется информация о цене продаж, она приводится непосредственно по тексту. Эта информация дает опорные представления о том, сколько стоит очистка воздушной среды обитания человека, с одной стороны, а с другой – сведения о том, что очистители – довольно сложные и дорогостоящие устройства. Проведенный анализ позволил сформулировать выводы и задачи, которые необходимо решить при создании отечественных очистителей воздуха.

Состояние воздушной среды обитания человека

В настоящее время в производственных, общественных и жилых помещениях широко используются телевизоры, компьютеры, кондиционеры, нагреватели и другие современные приборы, работа которых приводит к изменению свойств воздуха в среде обитания человека. В помещениях, где работает компьютер или телевизор, резко сокращается количество отрицательно заряженных частиц и увеличивается количество положительных частиц, поскольку они «съедают» остатки целебных отрицательных аэроионов в воздухе. Экраны компьютеров и телевизоров создают в помещениях «смог» вредоносных положительных аэроионов. Невидимки без вкуса и запаха проникают в легкие, и альвеолы легких покрываются слизью, слипаются. Это подтверждено целым рядом работ.

Впервые острую необходимость отрицательных аэроионов воздуха для жизни доказал русский биофизик Александр Леонидович Чижевский. Это было в 20-е гг. в СССР. Чижевский ставил такой эксперимент. Помещал мышей в герметичную камеру и пропускал туда воздух сквозь плотный фильтрующий слой ваты. Через 5–10 дней животные становились вялыми, как при авитаминозе. Постепенно болезненное состояние переходило в коматозное, мыши наотрез отказывались от пищи. Наконец агонизировали и гибли. Это явление Чижевский назвал аэроионным голоданием, объясняя, что при фильтрации воздух, проходя через слой ваты, оставляет на ней все свои электрические заряды, в том числе отрицательные аэроионы.