

## ЗАДАЧИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ В СОДЕРЖАНИИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ СОВРЕМЕННОГО УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Элементарная теория чисел является неотъемлемой частью предметной подготовки учителя математики. Это связано с тем, что: вопросы элементарной теории чисел входят в программу общего среднего образования по математике как на базовом, так и на профильном уровне; задачи элементарной теории чисел имеют значительный образовательный, развивающий потенциал и для их решения применяются разнообразные методы школьной математики. Рассматривается роль элементарной теории чисел в предметной подготовке современного учителя математики при реализации компетентного подхода. Обосновывается необходимость включения в содержание предметной компетентности учителя математики готовности решать задачи теории чисел с использованием элементарных методов. Уточняются требования к умению решать задачи по элементарной теории чисел.

**Ключевые слова:** предметная компетентность учителя математики, элементарная теория чисел, методы решения задач.

Сегодня предъявляются особенно высокие требования к предметной подготовке учителя математики. Освоение предметной области «математика» является обязательным элементом профессиональной подготовки будущего учителя математики. Именно предметная подготовка позволяет формировать профессиональную компетентность учителя-предметника. В своем исследовании мы взяли за основу определение понятия профессиональной компетентности учителя, которое предлагается авторами коллективной монографии «Компетентностный подход в педагогическом образовании» [1]. Под профессиональной компетентностью мы понимаем «интегральную характеристику, определяющую способность специалиста решать профессиональные проблемы и типичные профессиональные задачи, возникающие в реальных ситуациях профессиональной деятельности, с использованием знаний, профессионального и жизненного опыта, ценностей и наклонностей» [1, с. 8].

Предметная подготовка будущего учителя является одной из составляющих профессиональной подготовки [2]. В ходе нее учитель математики осваивает систему математических знаний и математическую деятельность, которой в дальнейшем будет учить своих учеников. Кроме того, предметная подготовка должна обеспечивать использование учителем предметного содержания как средства решения широкого круга задач развития и воспитания учащихся [3]. И это требует постановки и достижения задачи еще в ходе обучения в вузе, формирования предметной компетентности будущего учителя математики.

Под предметной компетентностью учителя математики как составляющей профессиональной его компетентности мы понимаем интегральную характеристику, определяющую способность специалиста решать предметные задачи, используя

знания классических разделов математики и опыт математической деятельности.

Сегодня учитель должен осуществлять обучение школьников как на базовом, так и на углубленном уровне, что предполагает в соответствии со стандартами школьного образования, кроме обучения учащихся на базовом уровне, также обучение школьников в классах с повышенным уровнем математической подготовки, проведение кружков, факультативов, элективных курсов для учащихся, интересующихся математикой, подготовку учащихся к участию в математических олимпиадах и исследовательских проектах, организацию индивидуальной работы с учащимися, желающими углубить знания по математике и др. Все это требует от учителя математики готовности решать задачи повышенного уровня сложности, например задачи единого государственного экзамена профильного уровня (ЕГЭ), олимпиадные задачи, и осуществлять соответствующую учебную деятельность. Поэтому предметная подготовка будущих учителей математики должна обеспечивать предметную компетентность учителя на таком уровне, который обеспечит бы выполнение перечисленных выше профессиональных задач.

В соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования (ФГОС СПОО) изучение учащимися математики должно обеспечивать сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, формирование логического и математического мышления, владение методами доказательств и алгоритмов решения математических задач, умения находить нестандартные способы решения задач [4]. Выполнение этих требований осуществляется, преимущественно на содержании, которое является примером, хотя и адаптированным, математической теории. Одним из таких примеров в курсе ма-

тематики средней школы является элементарная теория чисел.

Под элементарной теорией чисел обычно понимают «раздел теории чисел, изучающий свойства целых чисел элементарными методами» [5, с. 966]. В этот раздел входят теоретические вопросы и соответствующие задачи по разделам:

- теория делимости целых чисел и задачи на делимость (признаки делимости, нахождение и использование НОД, НОК);

- теоретико-числовые функции и задачи на нахождение суммы делителей натурального числа, количества делителей натурального числа и др.;

- Диофантовы уравнения, задачи на решение уравнений в целых числах;

- аддитивные представления натуральных чисел.

Методы решения задач элементарной теории чисел включают:

- методы логики: анализ, синтез, выдвижение гипотез и их проверка и др.;

- методы элементарной математики: метод математической индукции, комбинаторные, алгебраические методы и др.;

- методы теории делимости: использование свойств делимости, алгоритма Евклида, сравнения по модулю, позиционной записи числа, четности и др.

Раздел элементарной теории чисел является неотъемлемой частью предметной подготовки современного учителя математики. Это связано со следующим:

1. Вопросы элементарной теории чисел входят в программу общего среднего образования, причем если раньше делимость чисел в общеобразовательной школе изучалась только в курсе «Математика» 5–6-х классов, то сегодня в курсы «Алгебра» основной школы и «Алгебра и начала анализа» старшей школы включены более сложные вопросы элементарной теории чисел [6]. Задачи элементарной теории чисел включают в олимпиады по математике для школьников на разных этапах их проведения. Кроме того, задачи элементарной теории чисел с 2010 г. входят в ЕГЭ по математике на профильном уровне и относятся к самому высокому уровню сложности, а в 2015 г. задачи элементарной теории чисел были включены в содержание итоговой аттестации по математике за курс средней школы на базовом уровне. Например, в демонстрационных вариантах ЕГЭ в 2011 г. была предложена задача: «Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачеркивания первой цифры их десятичной записи снова получается десятичная запись числа, являющегося степенью двойки» [7, с. 36]. В 2015 г. в демонстрационных вариантах ЕГЭ базового уровня была предложена задача: «Сумма цифр трехзначного числа  $a$  делится

на 13. Сумма цифр числа  $a + 5$  также делится на 13. Найдите число  $a$ » [8, с. 14].

Аналитические отчеты Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) о проведении ЕГЭ по математике в 2010–2014 гг. показали, что последнее задание С6 решают менее 0,2 % всех выпускников, около 90 % выпускников вообще не приступают к его выполнению [9–13]. Причина такого положения заключается в том, что учителя в старших классах уделяют недостаточно внимания решению таких задач.

2. Задачи элементарной теории чисел имеют значительный образовательный, развивающий потенциал. При этом они доступны учащимся начиная с 6 и по 11 класс. Так, задачи на делимость могут быть использованы как средство развития логического и математического мышления. Большинство из них не решается по известным алгоритмам. Их решение включает выдвижение гипотез и их проверку, применение аналитико-синтетических поисковых схем. Например, для решения задачи: «Найдите все натуральные числа  $n$  такие, что для любых взаимно простых делителей  $a$  и  $b$  числа  $n$  число  $a + b - 1$  также является делителем числа  $n$ » необходимо выдвинуть гипотезу: «решением будут натуральные числа  $n$ , являющиеся степенью простого числа, и число 12» и доказать ее методом от противного [14].

Кроме этого, решение задач элементарной теории чисел предполагает хорошее владение формальным математическим языком. В ходе их решения требуется постоянное перекодирование информации с математического на естественный язык и обратно.

3. При решении задач элементарной теории чисел применяются разнообразные математические методы. В частности, некоторые задачи можно решить несколькими способами. Среди таких задач для учителя математики особенно значимы задачи, представленные в школьных учебниках. В зависимости от темы изучения они могут быть решены разными способами. Именно поэтому важнейшим показателем предметной компетентности учителя математики является владение различными способами решения задач.

Подтвердим последнее утверждение на примере. Рассмотрим задачу из школьного учебника для 8-го класса и приведем различные способы ее решения.

«Докажите, что при любых значениях  $n$  число  $n^3 + 3n^2 + 2n$  делится на 3» [15].

Способ 1.

По теореме о единственности деления с остатком  $n = 3k + m$ , где  $m$  остаток от деления на 3, значит,  $m$  может принимать значения 0, 1, 2. Тогда  $n^3 + 3n^2 + 2n = (3k + m)^3 + 3(3k + m)^2 + 2(3k + m) =$

$$= 3(9k^3 + 9k^2m + 9km^2 + 3k^26km + 2k) + (m^3 + 3m^2 + 2m),$$

$n^3 + 3n^2 + 2n$  делится на 3 тогда и только тогда, когда  $m^3 + 3m^2 + 2m$  делится на 3. Подставляя вместо  $m$  числа 0, 1, 2. Получаем, что выражение  $m^3 + 3m^2 + 2m$  может иметь значения 0, 6, 24. Так как числа 0, 6, 24 делятся на 3, то при любом значении  $n$   $n^3 + 3n^2 + 2n$  делится на 3.

Способ 2.

Разложим многочлен  $n^3 + 3n^2 + 2n$  на множители:

$$n^3 + 3n^2 + 2n = n(n + 1)(n + 2).$$

Так как  $n, n + 1, n + 2$  – три последовательных числа, то одно из них делится на 3. Значит, при любом значении  $n$   $n^3 + 3n^2 + 2n$  делится на 3.

Способ 3.

Докажем по индукции, что для любого значения  $n$   $n^3 + 3n^2 + 2n$  делится на 3.

При  $n = 1$   $n^3 + 3n^2 + 2n = 6$ . Так как 6 делится на 3, то при  $n = 1$   $n^3 + 3n^2 + 2n$  делится на 3.

Покажем, что для  $n \geq 2$   $n^3 + 3n^2 + 2n$  делится на 3.

Пусть для любого  $n \leq k$   $n^3 + 3n^2 + 2n$  делится на 3.

Докажем, что при  $n = k + 1$   $n^3 + 3n^2 + 2n$  делится на 3:

$$(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 2(k + 1) = (k^3 + 3k^2 + 2k) + 3(k^2 + 3k + 2).$$

Так как два слагаемых делятся на 3, то их сумма делится на три. Следовательно,  $(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + 2(k + 1)$  делится на 3.

Аналогичные задачи представлены в учебниках для основной и старшей школы (для классов с повышенным уровнем математической подготовки и профильных классов соответственно). Первые два способа применяются для решения таких задач в основной школе при изучении тем «Деление с остатком», «Разложение на множители многочлена». В старшей школе похожие задачи предлагаются после изучения метода математической индукции.

4. Задачи на делимость могут быть использованы для организации учебно-исследовательской деятельности учащихся. Например, в качестве такого исследования можно предложить найти и обосновать признаки делимости на 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41 и др.

5. Задачи и понятия элементарной теории чисел являются культурно-исторической ценностью. Они имеют многовековую историю. Многие из них носят имена великих ученых, например: Пифагоровы тройки, теорема Евклида, решето Эратосфена и др.

Чтобы учитель математики мог организовать работу по изучению элементов теории чисел в курсе математики средней школы, а также организовать внеклассную работу на этом содержании для

учащихся, интересующихся математикой, он должен быть готов решать соответствующие предметные задачи, в том числе повышенного уровня сложности.

Поэтому задачи элементарной теории чисел должны быть обязательным компонентом содержания предметно-методической подготовки будущего учителя математики, поскольку работа с ними обогащает спектр методов (и приемов) решения математических задач, а значит, способствует совершенствованию его предметной компетентности.

Вопросам формирования умений решения математических задач у студентов – будущих учителей математики посвящены диссертационные исследования многих авторов. В большинстве этих исследований основное внимание уделяется формированию отдельных умений решения задач, таких как анализ условия, выдвижение гипотезы и ее проверка, умения проводить анализ и синтез при решении задач. Формированию комплекса умений решать задачи уделяется недостаточно внимания.

Вопросы обучения отдельным типам задач элементарной теории чисел рассматриваются в исследованиях, посвященных изучению курсов алгебры и теории чисел в педагогических вузах. Например, Л. А. Осипова предлагает при изучении теории чисел в качестве арифметических приложений теории сравнений рассматривать задачи на нахождение остатка при делении на данное число [16]. Мы пришли к выводу, что вопрос о формировании умений будущих учителей математики решать задачи элементарной теории чисел остается недостаточно исследованным. Поэтому нами была подвергнута специальному исследованию предметная компетентность учителя математики, в части готовности решать задачи элементарной теории чисел.

В ходе исследования было необходимо выявить состояние готовности будущих учителей математики решать задачи элементарной теории чисел. Для этого был проведен эксперимент, который показал, что студенты в недостаточной степени владеют умением решать задачи элементарной теории чисел не только повышенной сложности (олимпиадных), но представленных в школьных учебниках (например на доказательство делимости или нахождение остатка при делении на данное число числовых и алгебраических выражений).

Такое положение дел не может обеспечить успешность деятельности выпускника вуза по обучению школьников решению таких задач. В результате исследования мы пришли к выводу о необходимости разработки методики обучения студентов решению задач элементарной теории чисел, в которой использовался бы более широкий спектр таких задач и разнообразные методы и приемы их решения. Реализа-

цию этой методики целесообразно было бы осуществить в рамках узко профессиональной (иногда ее называют методической) подготовки, которая традиционно содержательно более тесно связана с особенностями школьного обучения. Курсами, где можно ее

использовать, следует рассматривать курсы «Элементарная математика», «Практикум по решению задач по элементарной математике» (в бакалавриате), «Практикум по решению математических задач повышенной сложности» (в магистратуре).

### Список литературы

1. Козырев В. А., Радионова Н. Ф., Тряпицына А. П. Компетентностный подход в педагогическом образовании: колл. монография / под ред. проф. В. А. Козырева, проф. Н. Ф. Радионовой, проф. А. П. Тряпицыной. СПб.: РГПУ им. А. И. Герцена, 2008. 391 с.
2. Стефанова Н. Л., Пономарчук О. С. К постановке проблемы формирования предметной компетентности современного учителя математики // Проблемы теории и практики обучения математике: сб. науч. ст., представленных на междунар. науч. конф. «58-е Герценовские чтения». СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2005. С. 35–38.
3. Стефанова Н. Л. Компетентность современного учителя математики и пути ее формирования в процессе методической подготовки в вузе // Проблемы теории и практики обучения математике: сб. науч. ст., представленных на междунар. науч. конф. «56-е Герценовские чтения». СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2003. С. 14–18.
4. Федеральный образовательный стандарт общего среднего (полного) образования. URL: <http://standart.edu.ru>. – Doc. (дата обращения: 26.01.2013).
5. Виноградов И. М. Элементарная теория чисел / Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1985. Т. 5. С. 996.
6. Примерная программа основного общего образования по математике. URL: <http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2629> (дата обращения: 26.01.2013).
7. Высоцкий Э. Р., Гуцин Д. Д., Захаров П. И. ЕГЭ 2010. Математика. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий. М.: АСТ «Астрель», 2010. 88 с.
8. Ященко И. В. Единый государственный экзамен. Математика. Базовый уровень. Типовые экзаменационные варианты. 30 вариантов. ФИПИ. М.: Национальное образование, 2015. 174 с.
9. Аналитический отчет о проведении единого экзамена по математике за 2010. URL: <http://www.fipi.ru>. – pdf (дата обращения: 10.09.2012).
10. Аналитический отчет о проведении единого экзамена по математике за 2011. URL: <http://www.fipi.ru>. – pdf (дата обращения: 10.09.2012).
11. Аналитический отчет о проведении единого экзамена по математике за 2012. URL: <http://www.fipi.ru>. – pdf (дата обращения: 10.09.2012).
12. Аналитический отчет о проведении единого экзамена по математике за 2013. URL: <http://www.fipi.ru>. – pdf (дата обращения: 08.09.2013).
13. Аналитический отчет о проведении единого экзамена по математике за 2014. URL: <http://www.fipi.ru>. – pdf (дата обращения: 15.09.2014).
14. Джукич Д. Задача № 109744. URL: <http://www.problems.ru> // [http://www.problems.ru/view\\_problem\\_details\\_new.php?id=109744](http://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=109744). (дата обращения: 10.05.2013).
15. Звавич Л. И. Алгебра. 8 класс. Задачник. М., 2008. 271 с.
16. Осипова Л. А. Внеаудиторная самостоятельная работа студентов – будущих учителей математики в процессе обучения теории чисел в педвузе как условие формирования их предметной компетентности: дис. ... кан. пед. наук. Новокузнецк, 2006. 195 с.

Волкова Т. С., аспирант.

**Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена.**

Наб. реки Мойки, 48, Санкт-Петербург, Россия, 634061.

E-mail: [tanya-volkova@mail.ru](mailto:tanya-volkova@mail.ru)

*Материал поступил в редакцию 21.05.2014.*

*T. S. Volkova*

### ELEMENTARY NUMBER THEORY PROBLEMS AS A COMPONENT OF CONTENT OF MODERN MATHEMATICS TEACHER PREPARATION

Elementary number theory as a school mathematics section is an essential part of professional preparation of a mathematics teacher. It's explained by the fact that elementary number theory is a part of general secondary education programme both at basic and profile levels; problems in elementary number theory have considerable educational and teaching potential, and for their solution various methods of school mathematics are used. The paper is devoted to the role of elementary number theory as a component of professional preparation of a modern mathematics teacher in the context of competence approach. The author proves the necessity of including in the content of a mathematics teacher's professional subject competence readiness to solve theory number problems using elementary mathematics methods (school mathematics methods). Clarifies the requirements for the ability to solve problems in elementary number theory.

**Key words:** *professional subject competence of mathematics teacher; elementary number theory; methods of mathematical problems solving.*

## References

1. Kozyrev V. A., Radionova N. F., Tryapitsyna A. P. *Kompetentnostnyy podkhod v pedagogicheskom obrazovanii*: kollektivnaya monografiya [Competence approach to pedagogical education. Multi-author book]. Pod. red. prof. V. A. Kozyreva, prof. N. F. Radionovoy, prof. A. P. Tryapitsynoy. SPb., RGPU im. A. I. Gertsena Publ., 2008. 391 p. (in Russian).
2. Stefanova N. L., Ponomarchuk O. S. K postanovke problemy formirovaniya predmetnoy kompetentnosti sovremennogo uchitelya matematiki [On a problem of forming of subjective competence of a modern mathematics teacher]. *Problemy teorii i praktiki obucheniya matematike: sb. nauch. st., predstavlenykh nf Mezhdunarodnoy nauch. konf. "58-e Gertsenovskiy chteniya"* [Theoretical and practical problems of mathematical education: Collection of scientific papers, presented at the Intern. scientific. Conf. "LVIII Herzen readings"]. St. Petersburg, RGPU im. A. I. Gertsena Publ., 2005. Pp. 35–38 (in Russian).
3. Stefanova N. L. Kompetentnost' sovremennogo uchitelya matematiki i puti ee formirovaniya v protsesse metodicheskoy podgotovki v vuze [Competence of modern mathematics teacher and ways of its forming in course of methodical preparation in a higher educational establishment]. *Problemy teorii i praktiki obucheniya matematike: sb. nauch. st., predstavlenykh nf Mezhdunarodnoy nauch. konf. "56-e Gertsenovskiy chteniya"* [Theoretical and practical problems of mathematical education: Collection of scientific papers, presented at the Intern. scientific. conf. "LVI Herzen readings"]. St. Petersburg, RGPU im. A. I. Gertsena Publ., 2003. Pp. 14–18 (in Russian).
4. *Federal'nyy obrazovatel'nyy standart obshchego srednego (polnogo) obrazovaniya* [Federal state educational standard of general secondary (complete) education]. URL: <http://standart.edu.ru>. – Doc. (accessed 26 January 2013) (in Russian).
5. Vinogradov I. M. *Elementarnaya teoriya chisel. Matematicheskaya entsiklopediya* [Elementary number theory. Mathematical encyclopedia]. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ, 1985. Vol. 5. P. 996 (in Russian).
6. *Primernaya programma osnovnogo obshchego obrazovaniya po matematike* [Tentative programme of basic general mathematical education]. URL: <http://standart.edu.ru/catalog.aspx?CatalogId=2629> (accessed 26 January 2013) (in Russian).
7. Vysotskiy E. R., Gushchin D. D., Zakharov P. I. *YEGE 2010. Matematika. Samoye polnoye izdaniye tipovykh variantov real'nykh zadaniy* [Unified state examination. 2010. Mathematics. The most complete collection of real tasks.]. Moscow, AST "Astrel" Publ., 2010. 88 p. (in Russian).
8. Yashchenko I. V. *Yediny gosudarstvennyy ekzamen. Matematika. Bazovyy uroven'. Tipovyye ekzamenatsionnyye varianty. 30 variantov. FIPI* [Unified state examination. Mathematics. Basic level. Typical exam tests. 30 tests]. Moscow, Natsionalnoye obrazovaniye Publ., 2010. 88 p. (in Russian).
9. *Analiticheskiy otchet o provedenii yedinogo ekzamena po matematike za 2010* [Analysis report on holding a unified mathematics examination in 2010]. URL: <http://www.fipi.ru>. – pdf (accessed 10 September 2012) (in Russian).
10. *Analiticheskiy otchet o provedenii yedinogo ekzamena po matematike za 2011* [Analysis report on holding a unified mathematics examination in 2011]. URL: <http://www.fipi.ru>. – pdf (accessed 10 September 2012) (in Russian).
11. *Analiticheskiy otchet o provedenii yedinogo ekzamena po matematike za 2012* [Analysis report on holding a unified mathematics examination in 2012]. URL: <http://www.fipi.ru>. – pdf (accessed 10 September 2012) (in Russian).
12. *Analiticheskiy otchet o provedenii yedinogo ekzamena po matematike za 2013* [Analysis report on holding a unified mathematics examination in 2013]. URL: <http://www.fipi.ru>. – pdf (accessed 08 September 2013) (in Russian).
13. *Analiticheskiy otchet o provedenii yedinogo ekzamena po matematike za 2014* [Analysis report on holding a unified mathematics examination in 2014]. URL: <http://www.fipi.ru>. – pdf (accessed 15 September 2014) (in Russian).
14. Dzhukich D. *Zadacha № 109744* [Problem no 109744]. URL: <http://www.problems.ru> // [http://www.problems.ru/view\\_problem\\_details\\_new.php?id=109744](http://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=109744) (accessed 10 May 2013) (in Russian).
15. Zvavich L. I. *Algebra. 8 klass. Zadachnik* [Algebra for 8 year students. Problem book]. Moscow, 2008. 271 p. (in Russian).
16. Osipova L. A. *Vneauditornaya samostoyatel'naya rabota studentov – budushchikh uchiteley matematiki v protsesse obucheniya teorii chisel v pedvuze kak usloviye formirovaniya ikh predmetnoy kompetentnosti: Dis. kand. ped. nauk* [Extracurricular independent work of students – future mathematics teachers in the process of teaching the number theory in a pedagogical higher education establishment as a term of forming their subjective competence. Thesis of cand. ped. sci.]. Novokuznetsk, 2006. 195 p. (in Russian)

**Russian State Pedagogical University named after A. I. Gertsen.**

Nab. reki Moyki, 48, Sankt-Peterburg, Russia, 634061.

E-mail: [tanya-volkova@mail.ru](mailto:tanya-volkova@mail.ru)