УДК 517.5

К. Тухлиев

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В статье решается ряд экстремальных задач теории аппроксимации функций, суммируемых с квадратом на всей прямой $\mathrm{R}:=(-\infty,+\infty)$ – посредством целых функций экспоненциального типа. Так, в пространстве $L_2(\mathrm{R})$ вычислены точные константы в неравенствах типа Джексона–Стечкина. А также найдены точные верхние грани приближения классов функций из $L_2(\mathrm{R})$, определенных при помощи осредненных модулей непрерывности m-го порядка, где вместо оператора сдвига $T_h(f,x):=f(x+h)$ используется оператор Стеклова $S_h(f)$.

Ключевые слова: *наилучшие приближения, модуль непрерывности m-го порядка, неравенство Джексона–Стечкина, целая функция экспоненциального типа, оператор Стеклова.*

Общеизвестно, что начало исследований, связанных с аппроксимацией на всей оси, было положено С. Н. Бернштейном [1], который ввел в науку само понятие наилучшего приближения функции, заданной на бесконечном интервале посредством целых функций конечной степени и создал теорию приближения на всей оси $\mathrm{R}=(-\infty,+\infty)$. Дальнейшее развитие этого направления науки связано с именами Н. Винера, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, С. М. Никольского, И. И. Ибрагимова и многих других, результаты исследования которых изложены в монографиях [2–5].

В конце семидесятых годов прошлого века были опубликованы работы И. И. Ибрагимова и Ф. Г. Насибова [6], В. Ю. Попова [7], в которых рассматривается экстремальная задача об отыскании точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина для наилучших среднеквадратических приближений функций целыми функциями экспоненциального типа. Эти работы послужили основанием для введения понятия средних ν-поперечников, базирующихся на понятии средней размерности, введенном Г. Г. Магарил-Ильяевым [8, 9]. В частности, он вычислил точные значения средних ν-поперечников для соболевских классов функций с ограниченной по норме пространства r-й производной на всей оси [8, 9]. В дальнейшем эта тематика нашла свое развитие в серии работ С. Б. Вакарчука [10, 11] и М. Ш. Шабозова с соавторами [12–14]. Полученные в этой статье результаты являются продолжением и развитием цитированных выше работ в этом направлении.

Всюду далее придерживаемся следующих обозначений: N – множество натуральных чисел; $\mathrm{Z}_+=\mathrm{N}\cup\{0\}$; R_+ – множество положительных чисел вещественной оси; $L_p(\mathrm{R})(1\le p\le\infty,\mathrm{R}:=(-\infty,+\infty))$ – пространство измеримых и суммируемых в p-й степени на всей оси R функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathrm{R})}:=\left(\int_{\mathrm{R}}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty(1\le p<\infty).$$

При этом $L_\infty(\mathrm{R})$ – пространство измеримых и ограниченных на R функций с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(\mathrm{R})}:=\nu rai sup\{|f(x)|:x\in\mathrm{R}\}.$$

В обозначениях общего характера, там где это не вызывает недоразумений, вместо $\|f\|_{L_p(\mathrm{R})},\|f\|_{L\infty(\mathrm{R})}$ будем писать просто $\|f\|_p,\|f\|_\infty$. Через $L_p^{(r)}(\mathrm{R})\left(1\le p\le\infty,r\in\mathrm{Z}_+;L_p^{(0)}(\mathrm{R})=L_p(\mathrm{R})\right)$ обозначим множество функций $f\in L_p^{(r)}(\mathrm{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_p(\mathrm{R}),1\le p\le\infty$. Символом $B_{\sigma,p}(0<\sigma<\infty,1\le p\le\infty)$ будем обозначать сужение на R множества всех функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_p(\mathrm{R})$. Величину

$$A_\sigma(f)_p:=\inf\left\{\|f-g_\sigma\|_p:g_\sigma\in B_{\sigma,p}\right\},1\le p\le\infty$$

называют наилучшим приближением функции $f\in L_p(\mathrm{R})$ элементами подпространства $B_{\sigma,p}(\sigma\in\mathrm{R}_+,1\le p\le\infty)$.

Рассмотрим теперь в пространстве $L_2(\mathrm{R})$ оператор Стеклова

$$S_hf(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\,dt,h>0.$$

Определим конечные разности первого и высших порядков $f\in L_2(\mathrm{R})$ соотношениями

$$\Delta_h(f;x)=S_hf(x)-f(x)=(S_h-E)f(x),$$

$$\Delta_h^m(f;x)=\Delta_h\left(\Delta_h^{m-1}(f;x);x\right)=\left(S_h-E\right)^m f(x)=$$
$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}S_h^k f(x),$$

где

$$S_h^0 f(x)=f(x), S_h^k f(x)=S_h\left(S_h^{k-1}f(x)\right);$$
$$k=\overline{1,m};\ m\in\mathrm{N};$$

E – единичный оператор в пространстве $L_2[0,2\pi]$. Используя введенные разности, определим обобщенный модуль непрерывности m-го порядка функции $f\in L_2(\mathrm{R})$ равенством

$$\Omega_m(f;t)=\sup\left\{\left\|\Delta_h^m(f;\cdot)\right\|_{L_2}:h\in(0,t]\right\}, \tag{1}$$

которое назовем специальным модулем непрерывности m-го порядка.

В 1978 г. А. А. Лигун [15] для наилучшей полиномиальной аппроксимации 2π-периодических функций $f\in L_2^{(r)}[0,2\pi]$ получил следующий результат: пусть $k\in\mathrm{N}; r\in\mathrm{Z}_+; 0<t\le\pi/n;$ ψ – неотрицательная измеримая суммируемая на $[0,t]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда

$$\left\{A_{n,r,m}(\psi;t)\right\}^{-1}\le\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}[0,2\pi]\\ f\ne const}}\frac{E_{n-1}^2(f)_2}{\int_0^t\omega_m^2\left(f^{(r)};\tau\right)_2\psi(\tau)d\tau}\le$$
$$\le\left\{\inf_{n\le k<\infty}A_{k,r,m}(\psi;t)\right\}^{-1},$$

где $E_{n-1}(f)=\inf\left\{\left\|f-T_{n-1}\right\|_{L_2[0,2\pi]}:T_{n-1}\in T_{2n-1}\right\}$ – наилучшее приближение функции $f\in L_2$ множеством тригонометрических полиномов T_{2n-1} порядка n–1, а

$$A_{k,r,m}(\psi;t)=2^m k^{2r}\int_0^t(1-\cos k\tau)^m\psi(\tau)d\tau.$$

Дальнейшее обобщение результата [15] дано в работе М. Ш. Шабозова и Г. А. Юсупова [16]. В частности, ими было показано, что если $n,m\in\mathrm{N}; 0<p\le 2; r\in\mathrm{Z}_+; 0<t\le\pi/n$; ψ – некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке $[0,t]$ не эквивалентная нулю функция, то

$$\frac{1}{A_{n,r,m,p}(\psi;t)}\le\sup_{\substack{f\in L_2^{(r)}[0,2\pi]\\ f\ne const}}\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^t\omega_m^p\left(f^{(r)};\tau\right)_2\psi(\tau)d\tau\right)}\le$$
$$\le\frac{1}{\inf_{n\le k<\infty}A_{k,r,m,p}(\psi;t)}, \tag{2}$$

где

$$A_{k,r,m,p}(\psi;t)=2^{m/2}\left(k^{rp}\int_0^t(1-\cos k\tau)^{mp/2}\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p}.$$

Нашей целью является распространение неравенства (2) на случай приближения $f\in L_2(\mathrm{R})$ целыми функциями $g_\sigma\in B_{\sigma,2}$ для специального модуля непрерывности (1). Введем следующую экстремальную характеристику

$$M_{\sigma,m,r,p}(\psi;t):=\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathrm{R})}\frac{A_\sigma(f)_2}{\left(\int_0^t\Omega_m^p\left(f^{(r)};\tau\right)_2\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p}}, \tag{3}$$

где $r\in\mathrm{Z}_+; m\in\mathrm{N}; t,\sigma\in\mathrm{R}_+; 0<p\le 2$ ψ – неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке $[0,t]$ функция, не эквивалентная нулю.

Теорема 1. Пусть $m\in\mathrm{N}; r\in\mathrm{Z}_+; \sigma\in\mathrm{R}_+$, $0<t\le\pi/\sigma, 0<p\le 2$ и ψ – некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке функция, тождественно не равная нулю. Тогда выполняются неравенства

$$\left\{a_{m,r,p}(\psi;t,\sigma)\right\}^{-1}\le M_{\sigma,m,r,p}(\psi;t)\le$$
$$\le\left\{\inf_{\sigma\le u<\infty}a_{m,r,p}(\psi;t,u)\right\}^{-1}, \tag{4}$$

где

$$a_{m,r,p}(\psi;t,u)=\left(u^{rp}\int_0^t\left(1-\frac{\sin u\tau}{u\tau}\right)^{mp}\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p},$$
$$u\ge\sigma. \tag{5}$$

Доказательство. В работах [6, 7] доказано, что для произвольной функции $f\in L_2(\mathrm{R})$ существует единственная целая функция $F_\sigma\in B_{\sigma,2}$, которая является элементом наилучшего приближения функции f в метрике пространства $L_2(\mathrm{R})$ и имеет вид

$$F_\sigma(f;u):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iu\tau}\chi_\sigma(\tau)F(f;\tau)d\tau=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{+\sigma}e^{iu\tau}F(f;\tau)d\tau,$$

где $F(f)$– преобразование Фурье функции f; $\chi_\sigma(\tau)$ – характеристическая функция множества $(-\sigma,\sigma)$. При этом наилучшее среднеквадратическое приближение $f\in L_2(\mathrm{R})$ элементами $g_\sigma\in B_{\sigma,2}$ равно [6, 7]

$$A_\sigma(f)_2=\left\|f-F_\sigma(f)\right\|_{L_2(\mathrm{R})}=\left(\int_{|\tau|\ge\sigma}|F(f,\tau)|^2\,d\tau\right)^{1/2}.$$

Известно, что если функция $f \in L_2(\mathrm{R})$ и $F(f)$ – преобразование Фурье функции f, то преобразование Фурье F_r функции $f^{(r)} \in L_2$ определяется равенством $F_r(f;\tau) = (i\tau)^r F(f;\tau)$.

С учетом этого факта по tереме Планшереля получаем

$$\left\|\Delta_t^m\left(f^{(r)};\cdot\right)\right\|_{L_2(\mathrm{R})}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^{2r}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^{2m} |F(f;\tau)|^2\, d\tau. \quad (6)$$

Отсюда для любого фиксированного t, $0<t<\pi/n$ имеем

$$\Omega_m^2\left(f^{(r)};t\right) \ge \left\|\Delta_t^m\left(f^{(r)};\cdot\right)\right\|_{L_2(\mathrm{R})}^2 \ge$$

$$\ge \int_{|\tau|\ge\sigma} \tau^{2r}\left(1-\frac{\sin t\tau}{t\tau}\right)^{2m} |F(f;\tau)|^2\, d\tau. \quad (7)$$

Воспользуясь континуальным аналогом неравенства Минковского [17, с. 32]

$$\left(\int_0^h\left(\int_{|t|\ge\sigma}|\varphi(t,\tau)|^2\, d\tau\right)^{p/2} dt\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge\left(\int_{|t|\ge\sigma}\left(\int_0^h|\varphi(t,\tau)|^p\, dt\right)^{2/p} d\tau\right)^{1/2}, \quad (8)$$

где $0<p\le 2$ из (8) с учетом (7), получаем

$$\left(\int_0^t \Omega_m^p\left(f^{(r)};u\right)_2 \psi(u)\,du\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge\left(\int_0^t\left(\int_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{2r}\left(1-\frac{\sin u\tau}{u\tau}\right)^{2m}|F(f;\tau)|^2\, d\tau\right)^{p/2}\psi(u)\,du\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge\left(\int_{|\tau|\ge\sigma}\left(\int_0^t\tau^{rp}|F(f;\tau)|^p\left(1-\frac{\sin u\tau}{u\tau}\right)^{mp}\psi(u)\,du\right)^{2/p} d\tau\right)^{1/2} =$$

$$=\left(\int_{|\tau|\ge\sigma}|F(f;\tau)|^2\left(\tau^{rp}\int_0^t\left(1-\frac{\sin u\tau}{u\tau}\right)^{mp}\psi(u)\,du\right)^{2/p} d\tau\right)^{1/2} \ge$$

$$\ge\left\{\inf_{\sigma\le\tau<\infty} a_{m,r,p}(\psi;t,\tau)\right\}\left(\int_{|\tau|\ge\sigma}|F(f;\tau)|^2\, d\tau\right)^{1/2} =$$

$$= A_\sigma(f)_{L_2(\mathrm{R})} \inf_{\sigma\le\tau<\infty} a_{m,r,p}(\psi;t,\tau). \quad (9)$$

Из соотношения (9) находим

$$\frac{A_\sigma(f)_{L_2(\mathrm{R})}}{\left(\int_0^t \Omega_m^p\left(f^{(r)};\tau\right)_2 \psi(\tau)\,d\tau\right)^{1/p}} \le \frac{1}{\inf\limits_{\sigma\le\tau<\infty} a_{m,r,p}(\psi;t,\tau)}.$$

И так как последнее неравенство имеет место для любого $f \in L_2^{(r)}(\mathrm{R})$, то запишем

$$M_{\sigma,m,r,p}(\psi;t) \le \left\{\inf_{\sigma\le\tau<\infty} a_{m,r,p}(\psi;t,\tau)\right\}^{-1}, \quad (10)$$

и оценка сверху в неравенстве (4) получена.

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики (3), как и в работах [10, 11, 14], вводим в рассмотрение целую функцию экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon$ следующего вида

$$f_\varepsilon(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{\sin(\sigma+\varepsilon)x}{x} - \frac{\sin\sigma\varepsilon}{x}\right\},$$

где $\varepsilon>0$ – произвольное число. Для этой функции преобразование Фурье имеет вид

$$F(f_\varepsilon,x) = \begin{cases} 1, \textit{если } |\sigma|<|x|<\sigma+\varepsilon \\ ½, \textit{если } |x|=\sigma+\varepsilon \textit{ или } |x|=\sigma \\ 0, \textit{если } |x|>\sigma+\varepsilon \textit{ или } |x|<\sigma. \end{cases} \quad (11)$$

Очевидно, что $f_\varepsilon \in L_2^{(r)}(\mathrm{R})$ и, кроме того,

$$A_\sigma^2(f_\varepsilon)_{L_2^{(r)}(\mathrm{R})} = \int_{|\tau|\ge\sigma} |F(f_\varepsilon,\tau)|^2\, d\tau =$$

$$= \int_{-(\sigma+\varepsilon)}^{-\sigma} |F(f_\varepsilon,\tau)|^2\, d\tau + \int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} |F(f_\varepsilon,\tau)|^2\, d\tau = 2\varepsilon.$$

Так как для преобразования Фурье функции $f_\varepsilon^{(r)}$ справедливо равенство $F\left(f_\varepsilon^{(r)},x\right) = (ix)^r F(f_\varepsilon,x)$, то с учетом формулы (11) из равенства (6) имеем

$$\left\|\Delta_u^m\left(f_\varepsilon^{(r)};\cdot\right)\right\|_{L_2(\mathrm{R})}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^{2r}\left(1-\frac{\sin u\tau}{u\tau}\right)^{2m} F(f_\varepsilon;\tau) =$$

$$= 2\int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} \tau^{2r}\left(1-\frac{\sin u\tau}{u\tau}\right)^{2m} d\tau \le$$

$$\le 2\varepsilon(\sigma+\varepsilon)^{2r}\left(1-\frac{\sin(\sigma+\varepsilon)u}{(\sigma+\varepsilon)u}\right)^{2m}. \quad (12)$$

Из неравенства (12) для любых $\sigma\in\mathrm{R}_+$; $r\in\mathrm{Z}_+$; $m\in\mathrm{N}$; $0<p\le 2$; $0<t<\pi$; ψ – неотрицательная суммируемая на $[0,t]$ функция получаем

$$\left(\int_0^t \Omega_m^p\left(f_\varepsilon^{(r)},\tau\right)\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p} \le$$

$$\le A_\sigma\left(f_\varepsilon\right)_{L_2(\mathrm{R})}(\sigma+\varepsilon)^r\left(\int_0^t\left\{1-\frac{\sin(\sigma+\varepsilon)\tau}{(\sigma+\varepsilon)\tau}\right\}^{mp}\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p}.$$

Последнее неравенство запишем в виде

$$\frac{A_\sigma\left(f_\varepsilon\right)_{L_2(\mathrm{R})}}{\left(\int_0^t \Omega_m^p\left(f_\varepsilon^{(r)},\tau\right)\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p}} \ge$$

$$\ge \frac{1}{(\sigma+\varepsilon)^r\left(\int_0^t\left\{1-\frac{\sin(\sigma+\varepsilon)\tau}{(\sigma+\varepsilon)\tau}\right\}^{mp}\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p}} :=$$

$$:= \frac{1}{a_{\sigma+\varepsilon,m,r,p}(\psi;t)}. \qquad (13)$$

Очевидно, что величина $a_{\sigma+\varepsilon,m,r,p}(\psi;t)$ при $\varepsilon \to 0$ монотонно убывает, а потому для сколь угодно малого $\delta > 0$ существует $\varepsilon := \varepsilon(\delta) > 0$ такое, что

$$\frac{1}{a_{\sigma+\varepsilon,m,r,p}(\psi;t)} \ge \frac{1}{a_{\sigma,m,r,p}(\psi;t)} - \delta. \qquad (14)$$

Согласно определению экстремальной характеристики (3) и произвольности $\delta > 0$ из (13) и (14) получаем оценку снизу

$$M_{\sigma,m,r,p}(\psi;t) \ge \frac{1}{a_{\sigma,m,r,p}(\psi;t)}. \qquad (15)$$

Теперь из сопоставления неравенств (10) и (15) следует двойное неравенство (4), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из доказанной теоремы 1 можно вывести ряд следствий.

Следствие 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, весовая функция ψ является неубывающей на отрезке $[0,t]$. Тогда при любом $0 < t \le 3\pi/(4\sigma)$ справедливо равенство

$$M_{\sigma,m,r,p}(\psi;t) = \left\{a_{m,r,p}(\psi;t,\sigma)\right\}^{-1} :=$$

$$:= \sigma^{-r}\left(\int_0^t\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp}\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/p}. \qquad (16)$$

Из следствия 1 вытекает

Следствие 2. Если в утверждении следствия 1 полагать $p = 1/m, m \in \mathrm{N}, \psi(t) \equiv 1$ и $\psi(t) \equiv t$, то соответственно получаем равенства:

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathrm{R})}\frac{\sigma^r A_\sigma(f)_{L_2(\mathrm{R})}}{\left(\int_0^t \Omega_m^{1/m}\left(f^{(r)};\tau\right)d\tau\right)^m} = \left(\frac{\sigma}{\sigma t - Si(\sigma t)}\right)^m, \sigma\in\mathrm{R}_+,$$

где $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ – интегральный синус;

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathrm{R})}\frac{\sigma^r A_\sigma(f)_{L_2(\mathrm{R})}}{\left(\int_0^t \tau\,\Omega_m^{1/m}\left(f^{(r)};\tau\right)d\tau\right)^m} = \left(\frac{2}{t^2}\right)\left\{1-\left(\frac{2}{\sigma t}\sin\frac{\sigma t}{2}\right)^2\right\}^{-m}.$$

Из равенстве (5), полагая $t = a/\sigma\,(0 < a < \pi)$ и $\psi(\tau) = g(\sigma\tau)$, имеем:

$$a_{m,r,p}\left(g(\sigma\cdot);a/\sigma,u\right) =$$

$$= \left(u^{rp}\int_0^{a/\sigma}\left(1-\frac{\sin u\tau}{u\tau}\right)^{mp}g(\sigma\tau)d\tau\right)^{1/p} =$$

$$= \sigma^{r-1/p}\left(\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{rp}\int_0^a\left(1-\frac{\sin(u\,\tau/\sigma)}{(u\,\tau/\sigma)}\right)^{mp}g(\tau)d\tau\right)^{1/p}, \qquad (17)$$

где $\sigma \le u < \infty$. Из равенства (17) следует, что

$$\inf_{\sigma\le u<\infty} a_{m,r,p}\left(g(\sigma\cdot);a/\sigma,u\right) = \sigma^{r-1/p}\inf_{x\ge1} a_{m,r,p}(g;a,x),$$

где ради удобства положено

$$a_{m,r,p}(g;a,x) = \left(x^{rp}\int_0^a\left(1-\frac{\sin x\tau}{x\tau}\right)^{mp}g(\tau)d\tau\right)^{1/p}.$$

Введем новую экстремальную характеристику

$$\tilde{M}_{\sigma,m,r,p}(g;a) = \sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathrm{R})}\frac{\sigma^r A_\sigma(f)_2}{\left(\int_0^a \Omega_m^p\left(f^{(r)};\tau/\sigma\right)g(\tau)d\tau\right)^{1/p}}.$$

Следствие 3. Пусть $m\in\mathrm{N}, r\in\mathrm{Z}_+, 0 < p \le 2$ и $g(\tau)$ – некоторая неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке $[0,a]$ функция, где $a\in(0,\pi]$. Тогда справедливы неравенства

$$\left\{a_{m,r,p}(g;a,1)\right\}^{-1} \le \tilde{M}_{\sigma,m,r,p}(g;a) \le \left\{\inf_{x\ge1} a_{m,r,p}(g;a,x)\right\}^{-1}.$$

При этом если

$$\inf_{x\ge 1} a_{m,r,p}\left(g;a,x\right)=a_{m,r,p}\left(g;a,1\right),$$

то имеет место равенство

$$\tilde{M}_{\sigma,m,r,p}\left(g;a\right)=\frac{1}{a_{m,r,p}\left(g;a,1\right)}.$$

Известно [18, с. 236], что если $f\in L_2^{(r)}\left(\mathrm{R}\right)$, то все промежуточные производные $f^{(r-s)}\in L_2^{(r)}\left(\mathrm{R}\right)$ ($s=1,\ 2,\dots,\ r-1$), а потому представляет несомненный интерес отыскать значение экстремальных характеристик, содержащих величины наилучших приближений промежуточных производных $A_\sigma\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})}$ вместо величины наилучших приближений $A_\sigma\left(f\right)_{L_2(\mathrm{R})}$ элементами $g_\sigma\in B_{\sigma,2}$ в норме пространства $L_2^{(r)}\left(\mathrm{R}\right)$.

Теорема 2. Пусть $m\in\mathrm{N},\ r\in\mathrm{Z}_+,\ 0<p\le 2,\ \sigma\in\mathrm{R}_+,$ $0<h\le 3\pi/(4\sigma),\ \psi(\tau)$ – некоторая суммируемая на отрезке $[0,t]$ функция, тождественно не равная нулю. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\sigma^2A_\sigma\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})}}{\left(\int_0^t\Omega_m^p\left(f^{(r)};\tau\right)\psi\left(\tau\right)d\tau\right)^{1/p}}=$$

$$=\left(\int_0^t\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp}\psi\left(\tau\right)d\tau\right)^{-1/p},\qquad(18)$$

где $s=0,\ 1,\ 2,\dots,\ r$

Доказательство. Пользуясь схемой рассуждения [10], наилучшее приближение промежуточных производных посредством целых функций экспоненциального типа σ представим в виде

$$A_\sigma^2\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})}=\int_{|\tau|\ge\sigma}\tau^{2(r-s)}\left|F\left(f,\tau\right)\right|^2d\tau=$$

$$=\int_{|\tau|\ge\sigma}\left|F\left(f,\tau\right)\right|^{2(1-s/r)}\tau^{2(r-s)}\left|F\left(f,\tau\right)\right|^{2s/r}d\tau.\qquad(19)$$

Применяя к правой части (19) неравенство Гёльдера для интегралов, получаем

$$A_\sigma^2\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})}\le$$

$$\le\left(\int_{|\tau|\ge\sigma}\left|F\left(f,\tau\right)\right|^2\tau^{2r}d\tau\right)^{1-s/r}\left(\int_{|\tau|\ge\sigma}\left|F\left(f,\tau\right)\right|^2d\tau\right)^{s/r}=$$

$$=\left(A_\sigma\left(f^{(r)}\right)_{L_2(\mathrm{R})}\right)^{2(1-s/r)}\left(A_\sigma\left(f\right)_{L_2(\mathrm{R})}\right)^{2s/r}.\qquad(20)$$

Из равенства (16) для произвольной $f\in L_2^{(r)}\left(\mathrm{R}\right)$ вытекает неравенство

$$A_\sigma\left(f\right)_{L_2(\mathrm{R})}\le\left(\sigma^{rp}\int_0^t\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp}\psi\left(\tau\right)d\tau\right)^{-1/p}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^t\Omega_m^p\left(f^{(r)};\tau\right)\psi\left(\tau\right)d\tau\right)^{1/p}.\qquad(21)$$

При $r=0$ из (21) имеем

$$A_\sigma\left(f\right)_{L_2(\mathrm{R})}\le\left(\int_0^t\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp}\psi\left(\tau\right)d\tau\right)^{-1/p}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^t\Omega_m^p\left(f;\tau\right)\psi\left(\tau\right)d\tau\right)^{1/p}.$$

В последнем неравенстве, заменяя f на $f^{(r)}$, будем иметь

$$A_\sigma\left(f^{(r)}\right)_{L_2(\mathrm{R})}\le\left(\int_0^t\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp}\psi\left(\tau\right)d\tau\right)^{-1/p}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^t\Omega_m^p\left(f^{(r)};\tau\right)\psi\left(\tau\right)d\tau\right)^{1/p}.\qquad(22)$$

Воспользуясь вышеприведенными неравенствами (21) и (22), из (20) для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}\left(\mathrm{R}\right)$ получим

$$\frac{\sigma^sA_\sigma\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})}}{\left(\int_0^t\Omega_m^p\left(f^{(r)};\tau\right)\psi\left(\tau\right)d\tau\right)^{1/p}}\le$$

$$\le\left(\int_0^t\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp}\psi\left(\tau\right)d\tau\right)^{-1/p},\qquad(23)$$

откуда сразу следует оценка сверху.

Чтобы получить соответствующую оценку снизу, вводим в рассмотрение функцию $f_\varepsilon\in L_2^{(r)}\left(\mathrm{R}\right)$, использованную нами при доказательстве аналогичной оценки в теореме 1. Учитывая, что преобразование Фурье функции f_ε имеет вид (11), будем иметь

$$A_\sigma\left(f_\varepsilon^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})}=\left(\int_{|\tau|\ge\sigma}\left|F\left(f_\varepsilon,\tau\right)\right|^2\tau^{2(r-s)}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(2\int_\sigma^{\sigma+\varepsilon}\tau^{2(r-s)}d\tau\right)\ge\sqrt{2\varepsilon}\sigma^{(r-s)},$$

а потому, используя неравенства (12), запишем

$$\left(\int_0^t \Omega_m^p\left(f_\varepsilon^{(r)};\tau\right)\psi(\tau)\,d\tau\right)^{1/p} \le$$

$$\le \sqrt{2\varepsilon}\,(\sigma+\varepsilon)^r\left(\int_0^t\left(1-\frac{\sin(\sigma+\varepsilon)\tau}{(\sigma+\varepsilon)\tau}\right)^{mp}\psi(\tau)\,d\tau\right)^{1/p} \le$$

$$\le A_\sigma\left(f_\varepsilon^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})}\sigma^{s-r}(\sigma+\varepsilon)^r\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^t\left(1-\frac{\sin(\sigma+\varepsilon)\tau}{(\sigma+\varepsilon)\tau}\right)^{mp}\psi(\tau)\,d\tau\right)^{1/p}.$$

Из неравенства (23) находим

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathrm{R})}\frac{\sigma^s A_\sigma\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2^{(r)}(\mathrm{R})}}{\left(\int_0^t \Omega_m^p\left(f^{(r)};\tau\right)\psi(\tau)\,d\tau\right)^{1/p}} \ge$$

$$\ge \frac{\sigma^s A_\sigma\left(f_\varepsilon^{(r-s)}\right)_{L_2^{(r)}(\mathrm{R})}}{\left(\int_0^t \Omega_m^p\left(f_\varepsilon^{(r)};\tau\right)\psi(\tau)\,d\tau\right)^{1/p}} \ge$$

$$\ge\left(\frac{\sigma}{\sigma+\varepsilon}\right)^r\left(\int_0^t\left(1-\frac{\sin(\sigma+\varepsilon)\tau}{(\sigma+\varepsilon)\tau}\right)^{mp}\psi(\tau)\,d\tau\right)^{-1/p}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^t\left(1-\frac{\sin\sigma\tau}{\sigma\tau}\right)^{mp}\psi(\tau)\,d\tau\right)^{-1/p}. \qquad (24)$$

Сопоставляя оценку сверху (23) и оценку снизу (24), приходим к требуемому равенству (18), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Список литературы

1. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени // Собрание сочинений. Т. II. М.: АН СССР. 1952. С. 371–375.
2. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 406 с.
3. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.
4. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
5. Ибрагимов И. И. Теория приближения целыми функциями. Баку: Элм, 1979. 468 с.
6. Ибрагимов И. И., Насибов Ф. Г. Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // ДАН СССР. 1970. Т. 194. № 5. С. 1013–1016.
7. Попов В. Ю. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика. 1972. № 6. С. 65–73.
8. Магарил-Ильяев Г. Г. Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Мат. сборник. 1991. Т. 182. № 11. С. 1635–1656.
9. Магарил-Ильяев Г. Г. Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // ДАН СССР. 1991. Т. 318. № 1. С. 35–38.
10. Вакарчук С. Б., Доронин В. Г. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями конечной степени на прямой и точные значения средних поперечников функциональных классов // Укр. мат. журнал. 2010. Т. 62. № 8. С. 1032–1043.
11. Вакарчук С. Б. О некотрых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси I // Укр. мат. вісник. 2012. Т. 9. № 3. С. 401–429; II, Укр. мат. вісник. 2012, Т. 9, 4. С. 578–602.
12. Шабозов М. Ш., Мамадов Р. Наилучшее приближение целыми функциями экспоненциального типа в L_2 (R) // Вестник Хорогского госуниверситета. 2001. № 4. С. 76–81.
13. Шабозов М. Ш., Вакарчук С. Б., Мамадов Р. О точных значениях средних *n*-поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ. 2009. Т. 52. № 4. С. 247–254.
14. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. О точных значениях средних *n*-поперечников некоторых классов целых функций // Труды Инст. матем. и мех. УрО РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 315–327.
15. Лигун А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки. 1978. Т. 24. № 6. С. 785–792.
16. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки. 2011. Т. 90. № 5. С. 764–775.
17. Hardy G. G., Littlewood J. E. and Polya G. Inequality. Cambridge University Press. 2nd ed. 1952. 346 p.
18. Бекенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.

Тухлиев К., кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой.
Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова.
Ул. Мавлонбекова, 1, Худжанд, Республика Таджикистан, 735700.
E-mail: kamaridin.t54@mail.ru

Материал поступил в редакцию 22.12.2014

K. Tukhliev

ON SOME EXTREMAL PROBLEMS OF THE BEST APPROXIMATION BY ENTIRE FUNCTIONS

In this paper a number of extremal problems of approximation theory of square summable functions on the whole line $\mathrm{R}:=(-\infty,+\infty)$ by entire functions of exponential type. In the space $L_2(\mathrm{R})$ of the exact constants of Jackson-Stechkin type inequalities were calculated. Found There was found the upper bounds approximation of classes of functions $L_2(\mathrm{R})$, defined with the help of the average modulus of continuity of m-th order, where instead of the shift operator $T_h(f,x):=f(x+h)$ is used Steklov's operator $S_h(f)$.

Similar smoothness characteristics for solving the extremal problems of approximation theory for periodic functions in $L_2[0,2\pi]$ were previously considered in the works by V. A. Abilov, F. I. Abilova, S. B. Vakarchuk, M. Sh. Shabozov and others. It is proved that the obtained results in this paper are ultimate does not approving.

Key words: *the best approximation, modulus of continuity of m-order, Jakson-Stechkin type inequality, entire function of exponential type, operator of Steklova.*

References

1. Bernshteyn S. N. O nailuchshem priblizhenii nepreryvnykh funktsiy na vsey veshchestvennoy osi pri pomoshchi tselykh funktsiy dannoy stepeni [On the best approximation of continuous functions on the whole real axis by entire functions of given degree]. *Sobranie sochineniy – Collected Works*, vol.2. Moscow, AN SSSR Publ., 1952, pp. 371–375 (in Russian).
2. Akhiezer N. I. *Lektsii po teorii approksimatsii* [Lectures on the theory of approximation]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 406 p. (in Russian).
3. Nikol'skiy S. M. *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of functions of several variables and imbedding theorems]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 480 p. (in Russian).
4. Timan A. F. *Teoriya priblizheniya funktsiy deystvitel'nogo peremennogo* [Theory of approximation of functions of a real variable]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 624 p. (in Russian).
5. Ibragimov I. I. *Teoriya priblizheniya tselymi funktsiyami* [Theory of approximation of entire functions]. Baku, Elm Publ., 1979. 468 p. (in Russian).
6. Ibragimov I. I., Nasibov F. G. Ob otsenke nailuchshego priblizheniya summiruemoy funktsii na veshchestvennoy osi posredstvom tselykh funktsiy konechnoy stepeni [Estimating the best approximation of summable functions on the real axis by entire functions of finite degree]. *DAN SSSR*, 1970, vol. 194, no. 5, pp. 1013–1016 (in Russian).
7. Popov V. Yu. O nailuchshikh srednekvadraticheskikh priblizheniyakh tselymi funktsiyami eksponentsial'nogo tipa [The best mean-square approximations by entire functions of exponential type]. *Izv. Vuzov. Mathematica – Russian Mathematics (Iz. VUZ),* 1972, no. 6, pp. 65–73 (in Russian).
8. Magaril-Il'yaev G. G. Srednyaya razmernost', poperechniki i optimal'noe vosstanovlenie sobolevskikh klassov funktsiy na pryamoy [Mean dimension, widths, and optimal recovery of Sobolev classes of functions on the line]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics,* 1991, vol. 182, no. 11, pp.1635–1656 (in Russian).
9. Magaril-Il'yaev G. G. Srednyaya razmernost' i poperechniki klassov funktsiy na pryamoy [Mean dimension and widths of classes of functions on the line]. *DAN SSSR*, 1991, vol. 318, no. 1, pp.35–38 (in Russian).
10. Vakarchuk S. B., Doronin V. G. Nailuchshie srednekvadraticheskie priblizheniya tselymi funktsiyami konechnoy stepeni na pryamoy i tochnye znacheniya srednikh poperechnikov funktsional'nykh klassov [The best mean-square approximation of entire functions of finite degree on the line and the exact values of the mean widths of functional classes]. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal – Ukrainian Mathematical Journal*, 2010, vol. 62, no. 8, pp. 1032–1043 (in Russian).
11. Vakarchuk S. B. O nekotrykh ekstremal'nykh zadachakh teorii approksimatsii funktsiy na veshchestvennoy osi I [Some extreme problems in the theory of approximation of functions on real axis I]. *Ukr. mat. Visnik – Ukrainian methematical bulletin,* 2012, vol. 9, no. 3, pp. 401–429; II, *Ukr. mat. visnik*, 2012, vol.9, no. 4, pp. 578–602 (in Russian).
12. Shabozov M. Sh., Mamadov R. Nailuchshee priblizhenie tselymi funktsiyami eksponentsial'nogo tipa v L2 (R) [The best approximation of entire functions of exponential type in L2 (R)]. *Vestnik Khorogskogo gosudarstvennogo universiteta – Bulletin of Khorogskiy State University*, 2001, no. 4, pp. 76–81 (in Russian).
13. Shabozov M. Sh., Vakarchuk S. B., Mamadov R. O tochnykh znacheniyakh srednikh n-poperechnikov nekotorykh klassov funktsiy [On exact values of the n-widths mean of certain classes of functions]. *DAN RT*, 2009, vol. 52, no. 4, pp. 247–254 (in Russian).
14. Shabozov M. Sh., Yusupov G. A. O tochnykh znacheniyakh srednikh n-poperechnikov nekotorykh klassov tselykh funktsiy [On exact values of the n-widths mean of certain classes of entire functions]. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN – Proceedings of Inst. Mat. and fur. UB RAS*, 2012, vol. 18, no.4, pp. 315–327 (in Russian).

15. Ligun A. A. Nekotorye neravenstva mezhdu nailuchshimi priblizheniyami i modulyami nepreryvnosti v prostranstve L_2 [Some inequalities between best approximations and module of continuity in the space L_2]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes,* 1978, vol. 24, no. 6, pp.785–792 (in Russian).
16. Shabozov M. Sh., Yusupov G. A. Nailuchshie polinomial'nye priblizheniya v L_2 nekotorykh klassov 2π-periodicheskikh funktsiy i tochnye znacheniya ikh poperechnikov [The best polynomial approximation in L_2 of some classes of 2π-periodic functions and the exact values of their widths]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2011, vol. 90, no. 5, pp.764–775 (in Russian).
17. Hardy G. G., Littlewood J. E. and Polya G. *Inequality*. Cambridge University Press. 2nd ed., 1952. 346 p.
18. Beckenbach E., Bellman R. *Neravenstva* [Inequality]. Moscov, Mir Publ., 1965. 276 p. (in Russian).

Khujand State University named B. Gafurov.
Ul. Mavlonbekova, 1, Khujand, Respublika Tajikistan, 735700.
E-mail: kamaridin.t54@mail.ru