УДК 37.013, 373.1, 374, 378

Д. А. Терёшин

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ КУРСУ СТЕРЕОМЕТРИИ В КЛАССАХ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Рассматриваются вопросы организации обучения стереометрии в классах физико-математического профиля в контексте развития математического мышления учащихся. Приведена авторская система задач, ориентированная на овладение математической деятельностью. К большей части задач даны указания, идеи решения, ответы.

Ключевые слова: *математическое мышление, математическая деятельность, физико-математический профиль, стереометрия, задачи.*

С начала 2000-х гг. в России осуществляется профильное обучение в старшей школе, которое выступает в качестве средства дифференциации и индивидуализации обучения. В рамках профильного обучения за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитываются интересы, склонности и способности учащихся, создаются условия для образования старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами. Одним из таких профилей является физико-математический, ориентированный на углубленное изучение школьниками точных наук, в том числе математики.

Известно, что математическое образование учащихся представляет собой сложный процесс, основными компонентами которого являются освоение системы математических фактов и идей; овладение математической деятельностью и развитие математического мышления.

Последний из перечисленных компонентов является наиболее значимым, так как без него невозможно понять ту или иную математическую идею и овладеть определенными умственными операциями.

Процесс развития математического мышления должен быть ориентирован не столько на формирование у школьников определенных операций, сколько развивать у них способности к обнаружению новых связей и овладению общими приемами, которые могут быть использованы для решения новых задач.

Ф. Клейн высказал мысль о двух типах математиков – интуитивистах и формалистах [1]. Первые стараются проникнуть в сущность проблемы и «увидеть» результат путем озарения (инсайта), а затем уже формулируют теоремы и их доказательства, причем доказательство для них уже не так важно. Для вторых, наоборот, доказательство имеет первостепенное значение, причем желательно несколькими способами с целью перепроверить доказанное и убедиться в получении «абсолютной истины».

Исследование мышления способных к математике учащихся проводилось В. А. Крутецким, который выделил такие характеристики, как быстрое и широкое обобщение; стремление мыслить свернутыми умозаключениями; большая подвижность мыслительных процессов; свободное переключение от одной умственной операции к другой; тенденция к ясности, простоте, рациональности, экономичности, изяществу решения. Соответственно, по его мнению, главное при обучении математике – формировать у учащихся обобщенные математические отношения, развивать способности к обобщению.

В исследовании В. А. Крутецкого были обнаружены два способа обобщения: постепенное, к которому учащийся приходит в результате длительного решения однотипных задач, и обобщение «с места» – на основе анализа решения одной задачи, «...не испытывая затруднений, без помощи экспериментатора, без специальной тренировки в решении однотипных задач» [2].

Первый способ был определен В. В. Давыдовым как эмпирическое обобщение, а второй – теоретическое. Они обусловливают особенности двух типов мышления – рассудочно-эмпирического и теоретического [3].

По определению В. А. Крутецкого, основными характеристиками математического мышления являются [2]:

– способность к формализации математического материала, к отделению формы от содержания, абстрагированию от конкретных количественных отношений и пространственных форм и оперированию формальными структурами, структурами отношений и связей;

– способность обобщать математический материал, вычленять главное, отвлекаясь от несущественного, видеть общее во внешне различном;

– способность к оперированию числовой и знаковой символикой;

– способность к последовательному, правильно расчлененному логическому рассуждению, связанному с потребностью в доказательствах, обоснованиях, выводах;

– способность сокращать процесс рассуждения, мыслить свернутыми структурами;

– способность к обратимости мыслительного процесса (к переходу с прямого на обратный ход мысли);

– гибкость мышления, способность к переключению от одной умственной операции к другой, свобода от сковывающего влияния шаблонов и трафаретов. Эта особенность нужна в творческой работе математика;

– математическая память. Можно предположить, что ее характерные особенности также вытекают из особенностей математической науки, что это память на обобщения, формализованные структуры, логические схемы;

– способность к пространственным представлениям, которая прямым образом связана с наличием такой отрасли математики, как геометрия.

Мышление возникает и развивается в деятельности. Для математической деятельности характерно наличие трех элементов:

– математической организации (математического описания) эмпирического материала (математизация конкретных ситуаций) с помощью эмпирических и индуктивных методов – наблюдения, опыта, индукции, аналогии, обобщения и абстрагирования;

– логической организации математического материала (накопленного в результате первой стадии деятельности) с помощью методов логики;

– применения математической теории (построенной в результате второй стадии деятельности) с помощью решения задач математического и межпредметного характера [4].

Таким образом, принимая во внимание, что обучение математике в классах физико-математического профиля должно готовить учащихся к профессиональной математической деятельности, был разработан авторский курс стереометрии [5], ориентированный на развитие математического мышления учащихся. Учащимся предлагаются задачи, решение которых основано на применении уже известных методов, но в новых условиях (аналогия), когда необходимо использовать комбинацию методов и приемов, в частности, знания из планиметрии, алгебраические методы и т. д., нестандартные идеи и исследовательский подход.

Ниже приведены примеры соответствующих групп задач, к большинству из которых даны идеи решения, ответы, указания.

Задачи на аналогию

Задача 1. А. Три прямые одной плоскости параллельны. На первой из них взяты точки A_1 и A_2, на второй – B_1 и B_2, на третьей – C_1 и C_2. Пусть прямые A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2 пересекаются в точках X, Y и Z соответственно. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

Б. В плоскости даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что если прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 попарно пересекаются, то точки их пересечения лежат на одной прямой. (Частные случаи теоремы Дезарга.)

Идея: выход в пространство.

Задача 2. На плоскости даны три луча с общим началом, и внутри каждого из трех углов, образованных этими лучами, отмечено по точке. Постройте треугольник так, чтобы его вершины лежали на данных лучах, а стороны (или их продолжения) проходили через отмеченные точки (по одной через каждую из точек).

Идея: выход в пространство, сведение к задаче на построение сечения.

Задача 3. В четырехугольник $ABCD$ вписаны два прямоугольника с параллельными сторонами так, что на каждой из сторон AB, BC, CD, DA лежит по одной вершине каждого прямоугольника. Периметр каждого прямоугольника равен 10. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ и докажите, что для каждой точки на любой из сторон четырехугольника $ABCD$ можно построить прямоугольник с вершиной в этой точке, вписанный в $ABCD$, стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников и периметр которого также равен 10.

Идея: выход в пространство.

Указание: рассмотрите тетраэдр ABCD и его сечения.

Задачи на комбинацию методов и приемов

Задача 4. Докажите, что площадь ортогональной проекции куба с ребром 1 на плоскость численно равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную этой плоскости.

Идея: комбинация методов планиметрии и стереометрии.

Указание: пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный куб; убедитесь, что площадь его проекции на данную плоскость равна удвоенной площади проекции треугольника ACD_1, а длина его проекции на указанную прямую равна длине проекции диагонали B_1D на эту прямую.

Задачи на нестандартные примеры и конструкции

Задача 5. А. Верно ли, что угол между двумя наклонными меньше угла между их ортогональными проекциями на плоскость?

Ответ: не обязательно, пример приведен в задаче Б.

Б. Из точки A, расположенной вне плоскости, проведены перпендикуляр AO и наклонные AB и AC к этой плоскости. Известно, что $BO = 1$, $CO = 2\sqrt{2}$, угол BOC равен 45°. Найдите наибольшее возможное значение угла BAC.

Ответ: $\arccos(2\sqrt{6}/7)$, что больше 45°.

Задача 6. Можно ли из деревянного куба с единичным ребром вырезать:

а) два; б) три
правильных тетраэдра с единичным ребром?

Ответ: можно.

Указание: а) постройте сечение единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середины его ребер AB, BB_1, B_1C_1, C_1D_1, DD_1 и AD, являющееся правильным шестиугольником; тогда в каждую из двух получившихся частей, на которые это сечение делит куб, можно поместить правильный тетраэдр с единичным ребром;

б) пусть M и T – середины ребер CC_1 и AA_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$; расстояние между прямыми BB_1 и MT равно расстоянию между скрещивающимися ребрами правильного тетраэдра с ребром 1; поэтому на отрезке MT имеются точки K и P, симметричные относительно середины O отрезка MT, такие, что $BPKB_1$ – правильный тетраэдр с ребром 1; рассматривая вместо ребра BB_1 ребра AD и C_1D_1, можно аналогично разместить еще два таких же правильных тетраэдра.

Задача 7. А. Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри или на поверхности тетраэдра $ABCD$. Может ли сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ быть больше, чем сумма длин всех ребер тетраэдра $ABCD$?

Ответ: может.

Указание: рассмотрите правильную треугольную пирамиду $ABCD$ с достаточно малым ребром основания BCD и достаточно большим боковым ребром; тетраэдр $KLMN$ можно взять таким: $K = A$, $L = B$, $M = C$, N лежит на ребре AD достаточно близко к вершине A.

Б. Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри или на поверхности тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше, чем 4/3 суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$.

Задачи на применение нестандартной идеи

Сечения многогранников

Задача 8. Пусть на диагоналях AB_1 и BC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположены точки M и N соответственно так, что отрезок MN параллелен грани $ABCD$. Найдите отношения, в которых точки M и N делят отрезки AB_1 и BC_1, если $MN = \frac{\sqrt{5}}{3}AB$.

Идея: используйте вспомогательное сечение, проходящее через отрезок MN параллельно основанию куба.

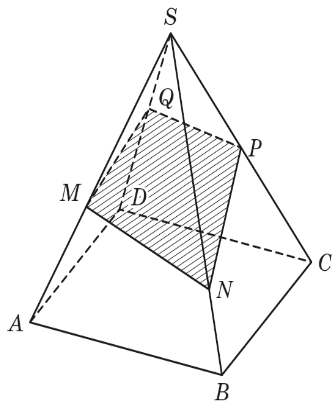
Задача 9. В основании пирамиды лежит правильный n-угольник. При каких n эта пирамида может иметь сечение, являющееся правильным $(n + 1)$-угольником?

Ответ: при $n = 3$ и при $n = 4$.

Идея: используйте вспомогательную проекцию сечения на плоскость основания пирамиды с центром в ее вершине.

Векторы и координаты

Задача 10. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB, SC и SD правильной четырехугольной пи-



рамиды $SABCD$ в точках M, N, P и Q соответственно. Докажите, что $\frac{1}{SM}+\frac{1}{SP}=\frac{1}{SN}+\frac{1}{SQ}$.

Идея: примените векторный метод к сечению многогранника.

Двугранные, многогранные и плоские углы

Задача 11. Пусть в пирамиде $ABCD$ плоские углы при вершине A прямые, а площади граней BCD, ABC, ABD и ACD равны S_0, S_1, S_2 и S_3 соответственно. Докажите, что $S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Идея: примените вспомогательную ортогональную проекцию.

Задача 12. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная одной из граней, плоский угол которой равен 45°. Найдите угол между этой прямой и ребром трехгранного угла, не лежащим в указанной грани.

Идея: рассмотрите трехгранный угол на вспомогательном многограннике – на кубе.

Задача 13. Из одной вершины прямоугольного параллелепипеда проведены диагонали всех граней, проходящих через эту вершину. Докажите, что сумма трех углов, образованных этими диагоналями, взятыми попарно, равна 180°.

Идея: замена фигуры.

Указание: пусть из одной вершины параллелепипеда проведены диагонали граней, сходящихся в этой вершине; соединив концы этих диагоналей, получим тетраэдр; замените параллелепипед этим тетраэдром.

Задача 14. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами, выходящими из той же вершины, что и диагональ, углы α, β и γ. Докажите, что $\alpha + \beta + \gamma < 180°$.

Идея: используйте нестандартное дополнительное построение – добавьте к данному параллелепипеду еще три таких же.

Многогранники

Задача 15. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной длины $2a$. Боковое ребро имеет длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 боковой грани и диагонали B_1D параллелепипеда, параллельные плоскости AA_1B_1B. Один из этих отрезков проведен через такую точку M диагонали AD_1, что $AM : AD_1 = 2 : 3$

а) найдите его длину;

б) найдите наименьшую длину рассматриваемых отрезков.

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{3}a; \frac{\sqrt{2}}{2}a.$

Указание: примените вспомогательную проекцию параллельно диагонали B_1D на плоскость AA_1B_1B.

Задача 16. Боковые грани правильной четырехугольной пирамиды и правильного тетраэдра равны. Эти многогранники приложили друг к другу так, что боковая грань одного из них совпала с боковой гранью другого. Сколько граней у получившегося многогранника?

Идея: используйте нестандартное достраивание фигуры.

Ответ: 5.

Указание: поставьте рядом с четырехугольной пирамидой еще одну такую же так, чтобы две стороны их оснований (по одной для каждой пирамиды) совпали.

Геометрические места точек

Задача 17. На поверхности правильного тетраэдра найдите геометрическое место концов отрезков, которые делятся пополам серединой данной высоты этого тетраэдра.

Идея: примените симметрию относительно середины данной высоты.

Задача 18. Найдите геометрическое место точек данного трехгранного угла, сумма расстояний от которых до его граней равна данному положительному числу a.

Идея: примените метод вспомогательного объема.

Тела вращения

Задача 19. Планета получена вращением квадрата со стороной a вокруг его диагонали. Маршрут по поверхности этой планеты называется кругосветным, если он замкнут и симметричен относительно центра квадрата. Найдите длину кратчайшего кругосветного маршрута.

Идея: примените развертку.

Задача 20. В пространстве расположены четыре конуса с общей вершиной и одинаковой образующей (но, вообще говоря, с разными радиусами оснований). Каждый из этих конусов касается двух других. Докажите, что четыре точки касания окружностей оснований конусов лежат на одной окружности.

Идея: вложите в каждый конус по шару.

Исследовательские задачи

Задача 21. Все ребра многогранника с шестью вершинами имеют одинаковую длину a, а расстояние между любыми двумя несмежными вершинами равно $a\sqrt{2}$. Верно ли, что это правильный октаэдр? Если нет, то найдите все многогранники, удовлетворяющие перечисленным условиям.

Задача 22. Преобразование пространства переводит любые две точки, находящиеся на расстоянии 1, в две точки, также находящиеся на расстоянии 1. Верно ли, что это преобразование является перемещением (движением)?

Задача 23. Сколько существует шаров, касающихся всех сторон данного пространственного четырехугольника или их продолжений?

Задача 24. Сколько существует шаров, касающихся всех ребер данного тетраэдра или их продолжений?

Задачи 21–24 весьма трудны и требуют для своего решения владения разнообразными методами геометрии, алгебры и комбинаторики.

Список литературы

1. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XX столетии. М.; Л., 1937. Ч. 1. 432 с.
2. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М.: Ин-т практич. психологии; Воронеж: МОДЭК, 1998. 416 с.
3. Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении. М.: Директ-Медиа, 2008. 843 с.
4. Столяр А. А. Роль математики в гуманизации образования // Математика в школе. 1990. № 6. С. 5–7.
5. Калинин А. Ю., Терёшин Д. А. Геометрия. 10–11 классы. М.: МЦНМО, 2010. 648 с.

Терёшин Д. А., старший преподаватель.

Московский физико-технический институт (государственный университет).

Институтский переулок, 9, Долгопрудный, Московская область, Россия, 141700.

E-mail: diter@mail.mipt.ru

Материал поступил в редакцию 13.03.2013.

D. A. Tereshin

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL THINKING OF STUDENTS IN SOLID GEOMETRY COURSE IN THE CLASSES OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL PROFILE

This article deals with the training solid geometry in the classes of physical and mathematical profile in the context of students' mathematical thinking. See author's system-oriented problems mastering the mathematical activity. The majority of the problems have been instructed, solution ideas and answers.

Key words: *mathematical thinking, mathematical activity, physical and mathematical profile, solid geometry, problem.*

Moscow Institute of Physics and Technology (State University).
Institutskiy pereulok, 9, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia, 141700.
E-mail: diter@mail.mipt.ru