Он порождает веер $\Sigma(\mathbf{P}^n)$, а соответствующие матрицы, задающие функции перехода имеют вид $(A_{k,0}(i, j))$, $A_{k,0}(i, i)=1, i \neq k$, $A_{k,0}(i, k)=-1$, $i=1, \ldots, n$.

Явный вид функций перехода

$$z_{kj} = \begin{cases} \dfrac{z_{0j}}{z_{0k}}, k \neq j \\ \dfrac{1}{z_{0k}}, k = j \end{cases},$$

показывает, что $X_{\Sigma(\mathbf{P}^n)} \cong T\mathbf{P}^n$.

Пример 2. Координатные гиперпространства в A^n задают набор гиперплоскостей в $\mathbf{P}(A^n)$. Координатные гиперпространства $\Gamma_i \subset A^n$ $x^i = 0, (i = 0, \ldots, n-1)$ позволяют определить действие тора $T_{\mathbf{R}}^{n-1}$ на $\mathbf{P}(A^n)$ и действие тора $T_{\pm}^{n-1}$ на $G(1, A^n)$.

В первом случае мы просто полагаем

$(t^1, \ldots, t^{n-1})\,(x^0 : \ldots ,: x^{n-1}) = (x^0 : t^1 x^1 : \ldots ,: t^{n-1} x^{n-1})$.

Во втором случае достаточно задать действие на точках $(M_0, \ldots, M_{n-1})$ пересечения прямой l с координатными гиперплоскостями Γ_i, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Мы полагаем для всякого $(t^0(1+\varepsilon\tau^0), \ldots, t^{n-1}(1+\varepsilon\tau^{n-1})) \in T$,

$$(t^0(1+\varepsilon\tau^0), \ldots, t^{n-1}(1+\varepsilon\tau^{n-1}))(M_0, \ldots, M_{n-1}) = (N_0, \ldots, N_{n-1})$$

где $N_0 = (t^1, \ldots, t^{n-1})M_0$,

$$\overrightarrow{OM_0} + \varepsilon\overrightarrow{M_0N_i} = (z_0^i, \ldots, z_{n-1}^i),\ i = 1, \ldots, n-1,$$

$$z_0^i = x^0(M_i) + \varepsilon(x^0(M_i) - x^0(M_0))*,$$

$$z_1^i = (t^1 + \varepsilon t^1\tau^1)(x^1(M_i) + \varepsilon(x^1(M_i) - x^1(M_0))), \ldots,$$

$$z_{n-1}^i = (t^n + \varepsilon t^n\tau^n)(x^{n-1}(M_i) + \varepsilon(x^{n-1}(M_i) - x^{n-1}(M_0))).$$

Этими условиями точки $(N_0, \ldots, N_{n-1})$ определены однозначно.

Теорема 3. Каноническое отображение $\pi : G(1, A^n) \to G(1, A^n)/\mathbf{Z}_2 \cong T\mathbf{P}(A^n)$ является гомоморфизмом D-торических многообразий.

Замечание. Эта теорема показывает, что имеет смысл категория D-торических орбифолдов [3]. Фактор-пространство $G(1, A^n)/\mathbf{Z}_N$, $N>2$ приводит к взвешенному проективному пространству (орбифолду) и касательному многообразию над ним [4,5].

Литература

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1985. 264 с.
2. Ehlers Fritz. Eine Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflosung einiger isolierter Singularitaten // Math. Ann. 218. 127–156. (1975).
3. Oda Tadao. Convex Bodies and Algebraic Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 212 p.
4. Lerman E., Tolman S. Hamiltonian torus actions on symplectic orbifolds and toric varieties, Transaction of the A.M.S. 349 № 10 . (1997), 4201–4205.
5. Prato Elisa. Simple Non-Rational Convex Polytopes via Symplectic Geometry, arXiv: math. SG/9904179, 15 p.

Н.Р. Щербаков

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ КЛАССЕ ПЛОСКОСТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В МНОГОМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Томский государственный университет

УДК 551.594.21

Плоскостной поверхностью (регулюсом) в многомерном пространстве принято называть a-параметрическое семейство $L(a)$ d-мерных плоскостей, для которого $d+a$ меньше размерности пространства. Как точечное многообразие – это поверхность $X(d,a)$ $(X \in L)$, $(d+a)$-мерная касательная плоскость $TX(d,a)$ которой в регулярной точке X содержит плоскостную образующую L. Если при смещении внутри L касательная плоскость не меняется, то поверхность $X(d, a)$ называется тангенциально вырожденной (аналог торсов 3-мерного пространства). В [1] было введено понятие плоскостной поверхности типа σ. Для нее касательные плоскости при смещении внутри L пересекаются по одной и той же «ассоциированной» плоскости $l_{d+\sigma}^* \supset L$. Простейший пример такой поверхности – 3-параметрическое семейство 2-мерных плоскостей в шестимерном проективном пространстве P_6. Касательные 5-плоскости $TX(2, 3)$ этой гиперповерхности во всех точках образующей L пересекаются по ассоциированной плоскости $l_{2+2}^* \equiv l_4^*$; таким образом, мы имеем плоскостную поверхность типа 2.

Присоединим к семейству $L(3)$ подвижной репер $\{A_I\}$, $(I, J, K=0, \ldots, 6)$ так, чтобы вершины A_i $(i= 0, 1, 2)$ лежали в плоскости L, вершины A_r $(r=3, 6)$ – в ассоциированной плоскости l_4^*, а вершины A_s $(s=4, 5)$ – в касательном подпространстве $TL(3)$ семейства [2], совпадающем с P_6. Деривационные формулы репера имеют вид $dA_I = \omega_I^J A_J$, где формы Пфаффа ω_I^J удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $D\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J$.

Пусть $\omega_0^3 \equiv \theta^1$, $\omega_1^4 \equiv \theta^2$, $\omega_2^3 \equiv \theta^3$ – базисные формы, тогда в силу выбора репера $\omega_i^p = a_{i\kappa}^p \theta^\kappa$, $\omega_r^s = a_{r\kappa}^s \theta^\kappa$ ($p = 3, \ldots, 6$; $r = 3, 6$; $s = 4, 5$; $\kappa = 1, 2, 3$).

Поместим еще вершины A_3, A_4, A_6 в касательную плоскость $T\,A_1\,(2, 3) = (L, A_3, A_4, A_6)$. Тогда матрица, определяющая касательную плоскость произвольной точки $X = x^i A_i \in L$ [2], примет вид

$$B = \begin{pmatrix} x^0 + a_{11}^3 x^1 & a_{12}^3 x^1 & a_{13}^3 x^1 + x^2 \\ 0 & a_{02}^4 x^0 + x^1 + a_{22}^4 x^2 & 0 \\ 0 & a_{02}^5 x^0 + a_{22}^5 x^2 & 0 \\ a_{i1}^6 x^i & a_{i2}^6 x^i & a_{i3}^6 x^i \end{pmatrix}.$$

Особыми класса c точками плоскости L называются такие точки, для которых понижается на c размерность касательной плоскости $TX(2, 3)$, т.е. если ранг матрицы B равен 2, то точка – особая класса 1, а если $Rang B = 1$, то точка – особая класса 2. Как было показано в [3], многообразие особых класса 1 точек плоскости L представляет из себя конику S^2 и изолированную точку M. В нашем репере

$$S^2 : \begin{vmatrix} x^0 + a_{11}^3 x^1 & a_{13}^3 x^1 + x^2 \\ a_{i1}^6 x^i & a_{i3}^6 x^i \end{vmatrix} = 0;$$

$$M : \begin{cases} a_{02}^4 x^0 + x^1 + a_{22}^4 x^2 = 0, \\ a_{02}^5 x^0 + a_{22}^5 x^2 = 0. \end{cases}$$

Завершим фиксацию репера, приведя уравнение коники S^2 к каноническому виду:

$$S^2 : a_{03}^6 (x^0)^2 + \Delta \times (x^1)^2 - a_{21}^6 (x^2)^2 = 0, \tag{1}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}^3 & a_{13}^3 \\ a_{11}^6 & a_{13}^6 \end{vmatrix}$, и помещая точку M на поляру точки A_1 относительно кривой S^2, т.е. на прямую $(A_0 A_2)$. Тогда координаты точки $M = A_2 - A_0 - (-1 : 0 : 1)$, и получаются следующие соотношения на коэффициенты $a_{i\kappa}^p$:

$$a_{02}^4 = a_{22}^4 = a_{02}^5 = a_{22}^5 = 1, \tag{2}$$

$$a_{01}^6 = a_{23}^6 \equiv \alpha, \tag{3}$$

$$a_{13}^6 = \alpha a_{13}^3 - a_{11}^3 a_{03}^6 \equiv \Delta_1, \tag{4}$$

$$a_{11}^6 = \alpha a_{11}^3 - a_{13}^3 a_{21}^6 \equiv \Delta_2. \tag{5}$$

Заметим, что точка $M \in S$, только если

$$a_{03}^6 = a_{21}^6, \tag{6}$$

а также что в силу (4, 5)

$$\Delta = (a_{13}^3)^2 a_{21}^6 - (a_{11}^3)^2 a_{03}^6. \tag{7}$$

Теперь в нашем репере в силу (2–5) матрица B, определяющая касательную плоскость в точке образующей, примет вид

$$B = \begin{pmatrix} x^0 + a_{11}^3 x^1 & a_{12}^3 x^1 & a_{13}^3 x^1 + x^2 \\ 0 & x^0 + x^1 + x^2 & 0 \\ 0 & x^0 + x^2 & 0 \\ \alpha x^0 + \Delta_2 x^1 + a_{21}^6 x^2 & a_{i2}^6 x^i & a_{03}^6 x^0 + \Delta_1 x^1 + \alpha x^2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где α, Δ_1, Δ_2 – обозначения из (3), (4), (5).

Цель данной работы – установить связь распадения коники S^2 и расположения точки M относительно S^2 с наличием в плоскости L особых класса 2 точек.

Теорема 1. Особая класса 1 точка M может стать особой класса 2, только если $M \in S^2$; при этом либо коника S^2 не распадается, тогда M – точка касания S^2 и прямой $(A_1 M)$; либо S^2 распадается на две действительные, пересекающиеся в точке A_1, прямые, одна из которых – $(A_1 M)$.

Доказательство.

Для особых класса 2 точек ранг матрицы B должен понизиться до 1. Из (8) следует, что для точек прямой $(A_0 A_2)$ $(x^1 = 0)$ это возможно, только если $x^0 + x^2 = 0$, т.е. для точки $M(-1 : 0 : 1)$. Для нее матрица B примет вид

$$B_M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^6 - \alpha & a_{21}^6 - a_{02}^6 & \alpha - a_{03}^6 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Таким образом, точка M может быть особой класса 2, только если

$$\begin{cases} a_{02}^6 = a_{22}^6, \\ a_{03}^6 = a_{21}^6. \end{cases} \tag{10}$$

Из (1) следует, что точка M в этом случае принадлежит конике S^2, уравнение которой принимает вид

$$a_{03}^6 [(x^0)^2 - (x^2)^2] + \Delta \times (x^1)^2 = 0, \tag{11}$$

где $a_{03}^6 \neq 0$, так как в противном случае $a_{21}^6 = 0$, а из (7) следует, что и $\Delta = 0$ и все точки плоскости L – особые класса 1, что исключается из рассмотрения. Из (11) видно, что S^2 может распадаться только при $\Delta = 0$ на прямые $x^0 - x^2 = 0$, $x^0 + x^2 = 0$, вторая из которых и есть $(A_1 M)$. Если же $\Delta \neq 0$, кривая S^2 не распадается, а прямая $(A_1 M)$ касается S^2 в точке M.

Теорема доказана.

Теорема 2. Особыми класса 2 точками плоскости L могут быть одна или две точки коники S^2 (отличные от M) только в следующих случаях:

A) коника S^2 не распадается. Тогда особыми класса 2 точками могут быть точки пересечения S^2 с прямой (A_1M); вместе с точками A_1 и M они образуют гармоническую четверку;

B) коника распадается на две действительные пересекающиеся в особой класса 2 точке A_1 прямые. Если одна из этих прямых (A_1M), то M – тоже особая класса 2 точка (см. теорему 1);

C) если коника S^2 распадается на дважды взятую прямую, то на ней лежит единственная в L особая класса 2 точка.

Доказательство.

Случай $x^1 = 0$ (точки прямой A_0A_2) был полностью рассмотрен в теореме 1. Пусть теперь $x^1 \neq 0$.

a) Начнем с точек прямой (A_1M) (за исключением точки M, которая рассмотрена в теореме 1), т.е. будем считать в (8) $x^0 + x^2 = 0$, $x^1 \neq 0$. Приравнивая в (8) нулю миноры 2-го порядка, окаймляющие элемент x^1, получаем систему

$$\begin{cases} x^0 + x^2 = 0, \\ x^0 + a_{11}^3 x^1 = 0, \\ a_{13}^3 x^1 + x^2 = 0, \\ \alpha x^0 + a_{11}^6 x^1 + a_{21}^6 x^2 = 0, \\ a_{03}^6 x^0 + a_{13}^6 x^1 + \alpha x^2 = 0, \end{cases} \qquad (12)$$

которая может иметь решение, только если

$$Rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a_{11}^3 \\ 0 & 1 & a_{13}^3 \\ \alpha & a_{21}^6 & a_{11}^6 \\ a_{03}^6 & \alpha & a_{13}^6 \end{pmatrix} = 2,$$

что приводит, с учетом (4) и (5), к требованию

$$a_{11}^3 + a_{13}^3 = 0. \qquad (13)$$

Тогда из (12) видно, что особыми класса 2 точками будут две точки прямой (A_1M): $N_1\,(a_{11}^3 : 1 : -a_{11}^3)$ и $N_2(-a_{11}^3 : 1 : a_{11}^3)$.

С учетом (13), (4) и (5) уравнение коники S^2 примет вид

$$a_{03}^6 (x^0)^2 + (a_{11}^3)^2 (a_{21}^6 - a_{03}^6)(x^1)^2 - a_{21}^6 (x^2) = 0, \qquad (14)$$

откуда видно, что точки N_1 и N_2 принадлежат S^2, а так как в нашем репере A_1 и M полярно сопряжены, то (A_1, M, N_1, N_2) образуют гармоническую четверку. При $a_{21}^6 \neq a_{03}^6$ коника не распадается.

b) Этот случай следует из a) при $a_{11}^3 = a_{13}^3 = 0$. Особой класса 2 точкой становится $A_1 = N_1 = N_2$; она же точка пересечения прямых, на которые при этом распадается коника S^2 (см. 14). Если еще и $a_{03}^6 = a_{21}^6$ и $a_{02}^6 = a_{22}^6$, то и точка $M \in S^2$ – особая класса 2 [см. 10–11].

c) Коника S^2 распадается, как видно из (1), на дважды взятую прямую только в двух случаях: на (A_1A_2) $((x^0)^2 = 0)$ при $a_{21}^6 = \Delta = 0$, $a_{03}^6 \neq 0$ или на прямую (A_0A_1) $((x^2)^2 = 0)$ при $a_{03}^6 = \Delta = 0, a_{21}^6 \neq 0$ $((a_{03}^6)^2 + (a_{21}^6)^2 \neq 0$, как отмечалось в теореме 1). В первом случае из (7) получаем $a_{11}^3 = 0$, из (5) – $a_{11}^6 = \Delta_2 = 0$ и из (4): $a_{13}^6 = \alpha a_{13}^3$. Тогда матрица B (8) принимает вид

$$B = \begin{pmatrix} x^0 & a_{12}^3 x^1 & a_{13}^3 x^1 + x^2 \\ 0 & x^0 + x^1 + x^2 & 0 \\ 0 & x^0 + x^2 & 0 \\ \alpha x^0 & x^i a_{12}^6 & a_{03}^6 x^0 + \alpha(a_{13}^3 x^1 + x^2) \end{pmatrix}.$$

Понижение ранга B до 1 возможно только для точек, координаты которых удовлетворяют условию: $x^0 + x^2 \neq 0$; что приводит к системе

$$\begin{cases} x^0 = 0, \\ a_{13}^3 x^1 + x^2 = 0, \end{cases}$$

определяющей единственную особую класса 2 точку (0: –1: a_{13}^3), лежащую на прямой $(A_1A_2) \equiv S^2$. Во втором случае аналогично получаем особую класса 2 точку (a_{11}^3: –1:0), лежащую на прямой $(A_0A_1) \equiv S^2$.

Теорема доказана.

Следствие.

Из теорем 1 и 2 следует, что если в плоскости L – образующей плоскостной поверхности типа 2 в P_6, – существуют особые класса 2 точки, то их не больше двух и они обязательно принадлежат конике S^2 (может быть распадающейся).

Литература

1. Гейдельман Р.М., Кругляков Л.З. О плоскостных поверхностях // ДАН СССР. 1974. Т. 219. № 1, С. 19–22.
2. Кругляков Л.З. Основы проективно-дифференциальной геометрии семейств многомерных плоскостей. Томск: ТГУ, 1980. 112 с.
3. Гейдельман Р.М., Кругляков Л.З., Середа А.В. Плоскостные поверхности типа σ // Геометр. сб. 22. Томск: ТГУ, 1982. С. 28–34.