УДК 539.12; 537.8; 530.1:51-72; 537.8

Л. Л. Рыскина

КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ЛАГРАНЖИАНОВ В ТЕОРИИ ПОЛЕЙ ВЫСШИХ СПИНОВ

Статья является обзорной, в ней изложен калибровочно-инвариантный подход к построению лагранжианов в теории полей высших спинов. Данный метод основан на использовании БРСТ-БФВ подхода, в рамках которого был исследован широкий круг задач по выводу лагранжевой формулировки для массивных и безмассовых, бозонных и фермионных полей высших спинов в пространствах Минковского и АдС различных размерностей, для полей со смешанной симметрией индексов, полей, на которые не накладываются никакие алгебраические ограничения.

Ключевые слова: *БРСТ-БФВ подход, поля высших спинов, пространство анти-де Ситтера, неприводимые представления, калибровочно-инвариантный лагранжиан.*

Введение

Одной из фундаментальных проблем физики высоких энергий является построение теории полей высших спинов. В общем виде данная проблема заключается в построении непротиворечивой лагранжевой формулировки для массивных и безмассовых бозонных и фермионных полей высших спинов взаимодействующих между собой и с полями низших спинов, а также с внешними полями. Несмотря на большое количество различных подходов к этой проблеме, отметим в этой связи работы М. А. Васильева с сотрудниками, А. Саньетти с сотрудниками, Р. Р. Мецаева, Ю. М. Зиновьева, К. Бекаерта и Н. Буланже, С. Дезера и А. Валдрона, К. Манвеляна и В. Рюля с сотрудниками.

Одно из современных направлений в теории полей высших спинов основывается на БРСТ-БФВ (Беки-Руэ-Стора-Тютин-Баталин-Фрадкин-Вилковыский) конструкции и получило название БРСТ-подхода (И. Л. Бухбиндер, А. И. Пашнев, М. Цулая, В. А. Крыхтин с сотрудниками). БРСТ-метод, возник при операторном квантовании динамических систем со связями первого рода, более точное название описанного метода БРСТ-БФВ подход или БФВ-подход[1] (см. также обзоры [1, 2]). БРСТ-БФВ подход, который будет использован в данной статье, отличается от стандартного БРСТ-формализма в конфигурационном пространстве калибровочной теории [3–5]. Рассматриваемые системы характеризуются связями первого рода в фазовом пространстве T_a, удовлетворяющими следующим условиям в терминах скобок Пуассона:

$[T_a, T_b] = f^c_{ab} T_c$.

Тогда БРСТ-БФВ-заряд или БФВ-заряд строится согласно правилу

$$Q = \eta^a T_a + \frac{1}{2}\eta^b \eta^a f^c_{ab} \mathcal{P}_c,\ Q^2 = 0,$$

где η^a и $\mathcal{P}_a$ – канонически сопряженные гостовские переменные (здесь рассматривается случай $gh(T) = 0$, тогда $gh(\eta^a) = 1,\ gh(\mathcal{P}_a) = -1$) удовлетворяют соотношению $\{\eta^a, \mathcal{P}_a\} = \delta^a_b$. После квантования БФВ заряд становится эрмитовым оператором, действующим в расширенном пространстве состояний, включая гостовские операторы. Физические состояния в расширенном пространстве определяются уравнением $Q|\Psi\rangle = 0$. В силу нильпотентности БРСТ-БФВ-оператора $Q^2 = 0$ физические поля могут быть определены с точностью до преобразования $|\Psi'\rangle = |\Psi\rangle + Q|\Lambda\rangle$, которое рассматривают в качестве калибровочного преобразования. При этом доказано, что существует эрмитов гамильтониан [6–8], приводящий к унитарной S-матрице в подпространстве физических состояний. То есть исходным здесь является гамильтонова формулировка лагранжевой модели.

Применение БРСТ-БФВ метода в теории полей высших спинов выглядит обратным к вышеупомянутой проблеме квантования. Изначально лагранжиан для полей высших спинов неизвестен, и его нахождение является основной целью. Исходными являются связи, определяющие неприводимое представление группы Пуанкаре или группы анти-де Ситтера с заданными массой и спином (см., напр.: [9, 10]), или некоторой деформации этих условий для случая произвольного искривленного пространства. Согласно общей схеме, развитой в работах [10–13], можно выделить следующие этапы построения лагранжианов для полей высших спинов:

Связи, определяющие неприводимое представление группы Пуанкаре или группы анти-де Ситтера, необходимо реализовать в виде операторов, действующих во вспомогательном пространстве Фока, и трактовать эти операторы как связи первого некоторой еще неизвестной лагранжевой теории.

Однако вследствие того, что в теории полей высших спинов часть этих связей не являются эрмитовыми операторами, то для построения эрми-

[1] В данной статье мы будем придерживаться формулировки БРСТ-БФВ подход.

тового БРСТ-оператора необходимо ввести в рассмотрение операторы, которые являются эрмитово сопряженными к исходным и не являются связями.

Построение БРСТ-заряда основывается на замкнутой алгебре связей. Чтобы рассматриваемая алгебра стала замкнутой, необходимо к этому набору операторов добавить еще некоторые операторы, которые также не являются связями. При этом показывается, что из-за присутствия операторов, которые не являются связями, стандартное БРСТ-БФВ построение не может быть применено. Интересно отметить, что в анти-деситтеровском пространстве получающаяся алгебра является нелинейной, и ее можно схематично записать следующим образом:

$[T,T] \sim T + T^2$.

Для того чтобы операторы, не являющиеся связями, не давали дополнительных ограничений на поля, необходимо построить новые (удлиненные) выражения для операторов, которые должны удовлетворять заданным условиям.

На основе алгебры новых (удлиненных) операторов строится БФВ-заряд.

Расширяется пространство Фока путем введения векторов, зависящих от гостовских переменных, и постулируется уравнение

$Q|\Psi\rangle = 0$,

которое понимается, как уравнение движение для полей высших спинов.

Показывается, что соотношения, определяющие неприводимые представления группы Пуанкаре или анти-де Ситтера, являются следствием уравнения $Q|\Phi\rangle = 0$. Так как уравнение $Q|\Phi\rangle = 0$ является инвариантным относительно преобразований

$|\Phi'\rangle = |\Phi\rangle + Q|\Lambda\rangle$,

то, как следствие, мы автоматически получаем калибровочно-инвариантные уравнения движения.

Строится лагранжиан, приводящий к уравнению $Q|\Psi\rangle = 0$. Например, лагранжиан для бозонных полей высших спинов имеет простую форму

$\mathcal{L} \sim \langle\Phi|KQ|\Phi\rangle$,

где $\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle$ – стандартное скалярное произведение в расширенном фоковском пространстве, K – некоторый оператор, обеспечивающий эрмитовость лагранжиана. В результате лагранжиан записывается в терминах БФВ-заряда.

Такая формулировка, если она существует, должна обладать следующими свойствами:

Являться калибровочно-инвариантной даже в случае массивных полей.

Содержать необходимый набор вспомогательных полей.

На поля и калибровочные параметры не налагается никаких условий априори.

Довольно часто применение данной схемы сопровождается некоторыми трудностями. Например, при построении эрмитового БФВ-заряда к исходным ограничениям необходимо добавить операторы, которые не являются связями. Но тогда получаем, что из-за присутствия операторов, которые не являются связями, стандартное БРСТ-БФВ построение не может быть применено. Интересно, что построение замкнутой алгебры в пространстве произвольной кривизны вводит ограничение на пространство, и оно становится пространством постоянной кривизны.

Основная идея применения БРСТ-БФВ подхода к построению лагранжианов для полей высших спинов

В этой главе на основе простой модели будет изложен метод построения калибровочно-инвариантных лагранжианов в рамках БРСТ-БФВ подхода. Этот метод построения лагранжианов был использован, например, в работах [10–13], и существенным отличием этого метода от метода, использованного в предыдущих работах (напр.: [14–16]), является то обстоятельство, что на поля и калибровочные параметры с самого начала не накладываются дополнительные условия. Все связи, определяющие неприводимое представление полей высших спинов, являются следствием уравнений движения, вытекающих из лагранжиана и калибровочных преобразований.

Рассмотрим модель, в которой «физические» состояния определены с помощью уравнений

$$L_0|\Phi\rangle = 0, \ L_1|\Phi\rangle = 0, \tag{1}$$

где L_0 и L_1 – некоторые операторы. Предположим также, что для состояний $|\Phi\rangle$ определено некоторое скалярное произведение $\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle$, и пусть L_0 является эрмитовым оператором $(L_0)^+ = L_0$, а L_1 – неэрмитовым $(L_1)^+ = L_1^+ \neq L_1$ по отношению к данному скалярному произведению. В этой главе будет показано, как построить лагранжиан, который будет воспроизводить (1) с точностью до калибровочных преобразований.

Чтобы получить лагранжиан в рамках БРСТ-БФВ подхода, следует начать с построения эрмитового БРСТ-оператора. Однако стандартная процедура не позволяет построить такой оператор на основе только операторов L_0 и L_1, если L_1 – не эрмитовый. В рассматриваемом случае определим нильпотентный эрмитов оператор следующим образом.

Рассмотрим коммутаторную алгебру, генерируемую операторами L_0, L_1, L_1^+, и пусть эта алгебра имеет вид

$$[L_0, L_1] = [L_0, L_1^+] = 0, \tag{2}$$

$$[L_1, L_1^+] = L_0 + C, \ C = const \neq 0. \tag{3}$$

Здесь оператор C играет роль центрального заряда и не может быть интерпретирован как связь ни в пространстве кет-векторов, ни в пространстве бра-векторов. Очевидно, что оператор L_1^+ не является связью в рамках соотношений (1). Введем эрмитовый БРСТ-оператор так, как если бы операторы L_0, L_1, L_1^+, C были связями первого рода.

$$Q = \eta_0 L_0 + \eta_C C + \eta_1^+ L_1 + \eta_1 L_1^+ - \eta_1^+ \eta_1 (\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_C), \quad (4)$$

$$Q^2 = 0. \quad (5)$$

Здесь η_0, η_C, η_1, η_1^+ – фермионные госты, соответствующие операторам L_0, C, L_1^+, L_1, $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_C$, $\mathcal{P}_1^+$, $\mathcal{P}_1$ – импульсы для гостов. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\{\eta_0, \mathcal{P}_0\} = \{\eta_C, \mathcal{P}_C\} = \{\eta_1, \mathcal{P}_1^+\} = \{\eta_1^+, \mathcal{P}_1\} = 1 \quad (6)$$

и действуют на вакуум следующим образом:

$$\mathcal{P}_0 |0\rangle = \mathcal{P}_C |0\rangle = \eta_1 |0\rangle = \mathcal{P}_1 |0\rangle = 0. \quad (7)$$

Гостовские числа этих полей

$$gh(\eta_0) = gh(\eta_C) = gh(\eta_1) = gh(\eta_1^+) = 1, \quad (8)$$

$$gh(\mathcal{P}_0) = gh(\mathcal{P}_C) = gh(\mathcal{P}_1) = gh(\mathcal{P}_1^+) = -1. \quad (9)$$

Оператор Q (4) действует в расширенном пространстве на векторы состояния, которые также зависят от гостовских полей η_0, η_C, η_1^+, $\mathcal{P}_1^+$:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k_i=0}^{1} (\eta_0)^{k_1} (\eta_C)^{k_2} (\eta_1^+)^{k_3} (\mathcal{P}_1^+)^{k_4} |\Phi_{k_1 k_2 k_3 k_4}\rangle. \quad (10)$$

Состояния $|\Phi_{k_1 k_2 k_3 k_4}\rangle$ в (10) не зависят от гостов, и состояние $|\Phi\rangle$ в (1) – это специальный случай (10) при $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$Q|\Psi\rangle = 0, \quad (11)$$

которое определяет «физические» состояния и может быть рассмотрено в качестве уравнений движения в БРСТ-БФВ подходе. Естественно полагать, что гостовское число «физических» состояний равно нулю, и поэтому в сумме (10) необходимо оставить только те слагаемые, которые удовлетворяют этому условию.

Очевидно, если $|\Psi\rangle$ является «физическим» состоянием, то $|\Psi'\rangle = |\Psi\rangle + Q|\Lambda\rangle$ также является «физическим» состоянием для любых $|\Lambda\rangle$ вследствие нильпотентности БРСТ-оператора Q. Таким образом, получаем калибровочную симметрию уравнений движения

$$\delta|\Psi\rangle = Q|\Lambda\rangle, \; gh(\Lambda) = -1. \quad (12)$$

В общем случае такая симметрия может быть приводимой, но в данной простой модели этого не случается, потому что здесь есть только один оператор с отрицательным гостовским числом P_1^+, причем $(P_1^+)^2 = 0$.

Теперь покажем, что, считая все операторы L_0, L_1, L_1^+, C связями первого рода в БРСТ-операторе (4), этот метод приводит к противоречиям с исходными соотношениями (1). С этой целью, выделим в операторе (4) и в состоянии (10) явную зависимость от гостов η_C, P_C

$$Q = \eta_C C - \eta_1^+ \eta_1 P_C + \Delta Q,, \quad (13)$$

$$|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle + \eta_C |\Psi_1\rangle \quad (14)$$

и подставим их в уравнение движения (11) и калибровочное преобразование (12) (часть калибровочного параметра $|\Lambda\rangle$, которая зависит от госта η_C, отсутствует, потому что в этом слагаемом не представляется возможным сохранить его гостовское число)

$$\Delta Q|\Psi_0\rangle - \eta_1^+ \eta_1 |\Psi_1\rangle = 0, \; \delta|\Psi_0\rangle = \Delta Q|\Lambda\rangle, \quad (15)$$

$$C|\Psi_0\rangle - \Delta Q|\Psi_1\rangle = 0, \; \delta|\Psi_1\rangle = C|\Lambda\rangle. \quad (16)$$

Откалибруем теперь $|\Psi_1\rangle$ и получим решение $|\Psi_0\rangle = 0$. Но $|\Psi_0\rangle = 0$ означает $|\Phi\rangle = 0$, что противоречит уравнению (1). Это происходит вследствие того, что оператор C рассматривался как связь. Для того чтобы развиваемый подход не противоречил соотношениям (1), следует применить новую процедуру.

Отметим, что если положить $C = 0$ в (3) и строить БРСТ-оператор так, как если бы L_0, L_1, L_1^+ являлись связями первого рода (не вводя, очевидно, госты η_C, P_C), то уравнения движения (1) воспроизводятся. Поэтому забудем на время, что L_1^+ не является связью, и попытаемся действовать следующим образом.

Расширим пространство представления алгебры операторов (2), (3), введя новые дополнительные операторы рождения и уничтожения, и построим новое представление алгебры, введя в нее произвольный параметр h. Основная идея состоит в том, чтобы построить такое представление алгебры, в котором новый оператор C_{new} примет вид $C_{new} = C + h$. Так как параметр h произвольный и C – центральный заряд, можно выбрать $h = -C$, и оператор C_{new} будет нулевым в новом представлении. После этого действуем так, как если бы операторы L_{0new}, L_{1new}, L_{1new}^+ являлись связями первого рода.

Применим вышеописанную процедуру для простой модели. Построим новое представление алгебры (2), (3) так, чтобы структура операторов в этом новом представлении имела вид

Новое представление для оператора	=	*Старое представление для оператора*	+	*Дополнительная часть, зависящая от операторов рождения и уничтожения*	(17)

Так как дополнительные и старые операторы рождения и уничтожения коммутируют друг с другом, то можно построить представление для дополнительных операторов и добавить их к исходным выражениям для операторов в алгебре (2), (3):

$$L_{0new} = L_0 + L_{0add}, \; C_{new} = C + C_{add}, \quad (18)$$

$$L_{1new} = L_1 + L_{1add}, \; L_{1new}^+ = L_1^+ + L_{1add}^+. \quad (19)$$

Дополнительные части операторов могут быть найдены, если потребовать, чтобы алгебра (2), (3) имела ту же самую форму в терминах новых операторов (18), (19). Нетрудно проверить, что решение для дополнительных операторов может быть записано следующим образом:

$$L_{0add} = 0,\ C_{add} = h, \quad (20)$$

$$L_{1add} = hb,\ L^{+}_{1add} = b^{+}. \quad (21)$$

Здесь были введены новые бозонные операторы рождения и уничтожения b^{+}, b со стандартными коммутационными соотношениями

$$[b, b^{+}] = 1. \quad (22)$$

Теперь подставим (20), (21) в (18), (19) и найдем новое представление для алгебры (2), (3):

$$L_{0new} = L_0,\ C_{new} = C + h, \quad (23)$$

$$L_{1new} = L_1 + hb,\ L^{+}_{1new} = L^{+}_1 + b^{+}. \quad (24)$$

Таким образом, построено новое представление. Далее будем рассматривать C_{new} как отличный от нуля оператор, включающий произвольный параметр h и, как и прежде, потребуем, чтобы векторы состояния и калибровочные параметры не зависели от госта η_C. Далее увидим, что эти условия означают $h = -C$.

Введем БРСТ-оператор, взяв операторы в новом представлении так, как если бы они были связями первого рода. Это приведет к следующему выражению для БРСТ-заряда:

$$Q_h = \eta_0 L_0 + \eta_C C_{new} + \eta^{+}_1 L_{1new} + \eta_1 L^{+}_{1new} - \eta^{+}_1 \eta_1 (P_0 + P_C),$$

$$Q_h^2 = 0. \quad (25)$$

Эти новые операторы (23), (24) вместе с БРСТ-зарядом (25) действуют на состояния расширенного пространства, которые не зависят от госта η_C (согласно схеме, описанной выше), но включают новые операторы b^{+}:

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_i=0}^{1} (\eta_0)^{k_1} (\eta^{+}_1)^{k_2} (P^{+}_1)^{k_3} (b^{+})^{k} |\Phi_{kk_1k_2k_3}\rangle. \quad (26)$$

Покажем, что уравнение (11) с БРСТ-зарядом (25) и вектором состояния (26) имеет решение (1) с точностью до калибровочных преобразований, т. е. описанная выше схема действительно ведет к искомым соотношениям (1).

С этой целью выделим в операторе (11) явную зависимость от гостов η_C, P_C:

$$Q_h = \eta_C (C + h) - \eta^{+}_1 \eta_1 P_C + \Delta Q_h. \quad (27)$$

Тогда уравнение (11) и калибровочные преобразования (12) приводят к

$$\Delta Q_h |\Psi\rangle = 0,\ \delta|\Psi\rangle = Q_h |\Lambda\rangle, \quad (28)$$

$$(C + h)|\Psi\rangle = 0,\ (C + h)|\Lambda\rangle = 0. \quad (29)$$

Из (29) находим, что параметр $h = -C$. Затем выделим зависимость вектора состояния и калибровочного параметра от гостовских полей

$$|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle + \eta^{+}_1 P^{+}_1 |\Psi_1\rangle + \eta_0 P^{+}_1 |\Psi_2\rangle,$$

$$|\Lambda\rangle = P^{+}_1 |\lambda\rangle. \quad (1.30)$$

Здесь векторы $|\Psi_0\rangle$, $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$, $|\lambda\rangle$ не зависят от гостовских полей и зависят от оператора b^{+}:

$$|\Psi_A\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (b^{+})^{k} |0\rangle \otimes |\Phi_{Ak}\rangle,\ A = 0,1,2, \quad (31)$$

$$|\lambda\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (b^{+})^{k} |0\rangle \otimes |\lambda_k\rangle, \quad (32)$$

где $|0\rangle$ – вакуум для оператора b: $b|0\rangle = 0$. Состояние $|\Phi\rangle$, которое находится в (1), есть $|\Phi_{00}\rangle$ в обозначениях (31).

Теперь запишем уравнения движения

$$L_0 |\Psi_0\rangle - (L^{+}_1 + b^{+})|\Psi_2\rangle = 0, \quad (33)$$

$$(L_1 - Cb)|\Psi_0\rangle - (L^{+}_1 + b^{+})|\Psi_1\rangle - |\Psi_2\rangle = 0, \quad (34)$$

$$L_0 |\Psi_1\rangle - (L_1 - Cb)|\Psi_2\rangle = 0 \quad (35)$$

и калибровочные преобразования

$$\delta|\Psi_0\rangle = (L^{+}_1 + b^{+})|\lambda\rangle, \quad (36)$$

$$\delta|\Psi_1\rangle = (L_1 - Cb)|\lambda\rangle, \quad (37)$$

$$\delta|\Psi_2\rangle = L_0 |\lambda\rangle. \quad (38)$$

Теперь с помощью калибровочных преобразований можно избавиться от поля $|\Psi_2\rangle$, после чего имеем калибровочные преобразования с калибровочным параметром $|\lambda\rangle$, связанным условием

$$L_0 |\lambda\rangle = 0. \quad (39)$$

После этого одно из уравнений движения принимает вид

$$L_0 |\Psi_1\rangle = 0,\ L_0 |\Phi_{1k}\rangle = 0, \quad (40)$$

соотношение (40) выполняется для любого k. Можно избавится от поля $|\Psi_1\rangle$

$$\delta|\Phi_{1k}\rangle = L_1 |\lambda_k\rangle - (k+1)C|\lambda_{k+1}\rangle, \quad (41)$$

используя этот ограниченный калибровочный параметр (39). После чего, получаем ограниченный калибровочный параметр (39), который не зависит от b^{+}: $|\lambda\rangle = |0\rangle \otimes |\lambda_0\rangle$. Используем это обстоятельство для удаления компоненты $|\Psi_0\rangle$, которая линейна в b^{+}: $(b^{+}|0\rangle \otimes |\Phi_{01}\rangle)$

$$\delta|\Phi_{01}\rangle = |\lambda_0\rangle. \quad (42)$$

Теперь компоненты $|\Psi_0\rangle$, зависящие от b^{+}: $((b^{+})^{k}|0\rangle \otimes |\Phi_{0k}\rangle,\ k \geq 2)$, исчезают вследствие уравнений движения (34). Остается только $|\Psi_0\rangle$, независящее от b^{+}: $(|0\rangle \otimes |\Phi_{00}\rangle)$ и уравнения движения для $|\Phi_{00}\rangle$, которые следуют из (33), (34)

$$L_0 |\Psi_0\rangle = 0 \ \Rightarrow\ L_0 |\Phi_{00}\rangle = 0, \quad (43)$$

$$(L_1 - Cb)|\Psi_0\rangle = 0 \ \Rightarrow\ L_1 |\Phi_{00}\rangle = 0, \quad (44)$$

совпадают с (1). Таким образом, было показано что описанная выше схема приводит к желаемому результату (1). Это означает, что процедура работает превосходно.

Покажем, что присутствие операторов, которые являются эрмитово сопряженными к связям L^{+}_1, не приводит к новым ограничениям на физические состояния. Это объясняется тем фактом, что L^{+}_1 появляется в БРСТ-заряде, умноженный на гостовский оператор уничтожения η_1 (7), который аннигилирует «физические» состояния $|0\rangle \otimes |\Phi_{00}\rangle$ в (31). Присутствие таких операторов, как L_1^+, в БРСТ-заряде всего лишь увеличивает калибровочную симметрию теории.

Отметим еще раз, что существуют два эквивалентных пути построения БРСТ-оператора. Первый из них заключается в том, чтобы положить $h = -C$ во всех выражениях для новых операторов (более того, можно не вводить этот параметр вовсе и строить новое представление для алгебры так, что $C_{new} = 0$), а затем построить БРСТ-оператор без гостов η_C, P_C. Другой метод состоит в том, чтобы, оставляя параметр h произвольным и строя БРСТ-оператор с гостами η_C, P_C, определить этот параметр h позже как следствие уравнения движения (11).

Обратим внимание, что операторы L_{1new} и L_{1new}^+ не взаимносопряжены в новом представлении, если использовать обычное правило для эрмитового сопряжения дополнительных операторов рождения и уничтожения

$$(b)^+ = b^+,\ (b^+)^+ = b\,. \tag{45}$$

Чтобы рассматривать операторы L_{1new}, L_{1new}^+ как сопряженные друг к другу, изменим определение скалярного произведения для вектора состояния (26) следующим образом:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle_{new} = \langle \Psi_1 | K_h | \Psi_2 \rangle, \tag{46}$$

где

$$K_h = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \frac{h^n}{n!} \langle n|, \tag{47}$$

$$|n\rangle = (b^+)^n |0\rangle\,. \tag{48}$$

Теперь новые операторы L_{1new}, L_{1new}^+ взаимно сопряжены, а оператор Q_h является эрмитовым относительно нового скалярного произведения (46), так как имеют место следующие соотношения

$$K_h L_{1new}^+ = (L_{1new})^+ K_h, \tag{49}$$

$$K_h L_{1new} = (L_{1new}^+)^+ K_h, \tag{50}$$

$$Q_h^+ K_h = K_h Q_h\,. \tag{51}$$

Наконец отметим, что уравнения движения (33)–(35) могут быть получены из следующего лагранжиана:

$$L = \int d\eta_0 \langle \Psi | K_{-C} \Delta Q_{-C} | \Psi \rangle \tag{52}$$

где индекс $-C$ означает, что сделана замена $-C$ вместо h. Здесь интеграл взят по нечетной грассманновой переменной η_0.

В данной главе на основе простой модели, следуя [11], был изложен метод, позволяющий построить калибровочно-инвариантный лагранжиан для полей высших спинов исходя из уравнений движения в рамках БРСТ-БФВ подхода.

Заключение

В рамках этого подхода был исследован широкий круг задач по выводу лагранжевой формулировки для массивных и безмассовых, бозонных и фермионных полей высших спинов в пространствах Минковского и АдС различных размерностей, для полей со смешанной симметрией индексов, полей, на которые не наложены алгебраические ограничения (см. [12, 13]). Отметим также применение БРСТ подхода к выводу кубичной вершины взаимодействия безмассовых полей высших спинов.

Автор выражает благодарность И. Л. Бухбиндеру, В. А. Крыхтину, Х. Таката за плодотворное сотрудничество. Работа выполнена с частичной поддержкой грантов: грант Президента РФ – проект № НШ-3558.2010.2, а также АВЦП проект № 2. 1.1/1019 и проект № 2. 1824.2011.

Список литературы

1. Batalin I. A. Operator quantization method and abelization of dynamical systems subject to first class constraints // Riv. Nuovo. Cim. 1986. 9. No 10. P. 1–48.
2. Batalin I. A., Fradkin E. S. Operatorial quantization of dynamical systems subject to constraints. A further study of the construction, Annals Inst. H. Poincare // Theor. Phys. 1988. 49. No 2. P. 145–214.
3. Becchi C., Rouet A., Stora R. Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble Model // Commun. Math. Phys. 1975. 42. P. 127–162.
4. Becchi C., Rouet A., Stora R. Renormalization of Gauge theories // Annals Phys. 1976. 98. 287 p.
5. Tyutin I. V. Gauge invariance in field theory and statistics in operator formulation // Preprint FIAN. 1975. No 39.
6. Fradkin E. S., Vilkovisky G. A. Quantization of relativistic systems with constraints // Phys. Lett. B 55. 1975. P. 224–226.
7. Batalin I. A., Vilkovisky G. A. Relativistic S-matrix of dynamical systems with boson and fermion constraints // Phys. Lett. B 69. 1977. P. 309–312.
8. Batalin I. A., Fradkin E. S. Operator qunatization of relativistic dynamical system subject to first class constraints // Phys. Lett. B 128. 1983. P. 303–308.
9. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M. Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity. Bristol and Philadelphia: Instit. of Physics Publ., 1988. 656 p.
10. Buchbinder I. L. et al. BRST approach to Lagrangian construction for fermionic massless higher spin fields // Nucl. Phys. B711. 2005. P. 367–391.
11. Buchbinder I. L., Krykhtin V. A. Gauge invariant Lagrangian construction for massive bosonic higher spin fields in D dimensions // Nucl. Phys. B 727. 2005. P. 537–563.

12. Рыскина Л. Л. Лагранжевая формулировка массивных фермионных антисимметричных полей в пространстве анти-де Ситтера // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (Tomsk State Pedagogical University Bulletin). 2011. Вып. 5(107). С. 23–30.
13. Рыскина Л. Л. БРСТ-БФВ подход для построения лагранжианов массивных бозонных антисимметричных полей в искривленном пространстве // Там же. Вып. 8(110). С. 36–37.
14. Singh L. P. S., Hagen C. R. Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case // Phys. Rev. D 9. 1974. P. 898–909.
15. Singh L. P. S., Hagen C. R. Lagrangian formulation for arbitrary spin. 2. The fermion case // Phys. Rev. D 9. 1974. P. 910–920.
16. Chang S. J. Lagrange Formulation for Systems with Higher Spin // Phys. Rev. 1967. 161. P. 1308–1315.

Рыскина Л. Л., кандидат физико-математических наук, ассистент.
Томский государственный педагогический университет.
Ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061.
E-mail: ryskina@tspu.edu.ru

Материал посупил в редакцию 10.05.2012.

L. L. Ryskina

GAUGE INVARIANT APPROACH TO LAGRANGIAN CONSTRUCTION FOR HIGHER SPIN FIELDS

In this article, we consider the gauge invariant approach to Lagrangian construction for higher spin fields. The method is based on BRST-BFV construction, can be applied to construction of Lagrangians both for massive and massless bosonic and fermionic higher spin fields, in Minkowski or AdS spaces, for fields with mixed index symmetry and fields without any algebraic constraints.

Key words: *BRST-approach, higher spin fields, anti-de Sitter (AdS) space, irreducible representations, gauge invariant Lagrangian.*

Tomsk State Pedagogical University.
Ul. Kievskaya, 60, Tomsk, Russia, 634061.
E-mail: ryskina@tspu.edu.ru