а) $(25-x)\cdot 21+36x=675$; *б*) $21x+36\cdot(25-x)=675$;

в) $21\cdot 15+36x=675$; *г*) $21x+36\cdot 10=675$;

д) $21\cdot 15+36\cdot 10=x\cdot 25$; *е*) $21x+36y=675$.

Сформулируйте задачу, соответствующую каждому из этих уравнений» [5, с. 263].

Учащимся 8-го класса предлагается подобрать значение параметра в зависимости от заданных условий:

«*Цена часов снижена на столько процентов, сколько рублей стоили часы до снижения. На сколько процентов снижена цена часов, если после снижения они стали стоить т рублей.*

Подберите такое значение т, чтобы задача:

а) имела два ответа;

б) имела единственное решение;

в) не имела решений» [7, с. 118].

Итак, мы рассмотрели некоторые задания, входящие в систему заданий, направленных на развитие умения осуществлять моделирование. Данные задания прошли экспериментальную проверку в школах г. Томска и Томской области. Итоги эксперимента [16] показали, что специальная система заданий, направленная на развитие у учащихся осуществлять моделирование, способствует их успешности в решении текстовых задач, развивает умение мыслить критически, повышает интерес к предмету.

Литература

1. Виленкин Н.Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты // Математика в школе. 1988. № 4.
2. Дьюи Д. Психология и педагогика мышления / Пер. с англ. Н.М. Никольской. М., 1990.
3. Далингер В.А. Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей / ОмИПКРО. Омск, 1993.
4. Гельфман Э.Г. и др. Натуральные числа и десятичные дроби. Практикум: Учеб. пос. по математике для 5 класса. Томск, 2003.
5. Гельфман Э.Г. и др. Положительные и отрицательные числа: Учеб. пос. по математике для 6 класса. Томск, 2001.
6. Гельфман Э.Г. и др. Знакомимся с алгеброй: Учеб. пос. по математике для 7 класса. Томск, 2002.
7. Гельфман Э.Г. и др. Квадратные уравнения: Учеб. пос. по математике для 8 класса. Томск, 2002.
8. Гельфман Э.Г. и др. Квадратичная функция: Учеб. пос. по математике для 9 класса. Томск, 2002.
9. Концепция и программа проекта «Математика. Психология. Интеллект». Математика 5–9 классы. Томск, 1999.
10. Маликова Н.Г. Развитие умения моделировать как средство обучения решению текстовых задач // Совершенствование процесса обучения математике в условиях модернизации российского образования: Мат-лы всерос. науч.-практ. конф. Волгоград, 26 окт. 2004 г. / Волгогр. гос. пед. ун-т. Волгоград, 2004.
11. Матушкина З.П. Приемы обучения учащихся решению математических задач: Учеб. пос. Курган, 2003.
12. Былков В.С. О характере использования математической модели в курсе алгебры и начал анализа // Методические рекомендации к практическим занятиям по методике преподавания математики (в средней школе и средних ПТУ) / Под ред. Р.С. Черкасова, А.Я. Блоха. М., 1985.
13. Толпенина Н.В. Методика организации учебных исследований при обучении учащихся решению уравнений, неравенств и их систем с параметрами: Афтореф. дис. ... канд. пед. наук. Омск, 2002.
14. Пойа Д. Как решать задачу: Пос. для учителей. М., 1961.
15. Блох А.Я., Барзанова Р.В. Методика работы над текстовой алгебраической задачей // Методические рекомендации по преподаванию математики в средней школе / Под ред. Р.С. Черкасова. М., 1979.
16. Маликова Н.Г. О некоторых проблемах, возникающих у учащихся при решении текстовых задачах // Сб. мат-лов шк.-семин. «Мастерство учителя в психологически ориентированных моделях обучения». Дидактика математики: сегодня и завтра. Томск, 2001.

И.Г. Попова

СТАНОВЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ АСПЕКТОВ СМЫСЛА ПОНЯТИЯ «НАТУРАЛЬНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ»

Барнаульский государственный педагогический университет

Изменение взглядов на школьное образование и связанный с этим переход к личностно ориентированному обучению сопровождается пересмотром содержания различных школьных предметов, путей постижения этого содержания учащимися. Последнее с неизбежностью ведет к обновлению учебных программ, отличающихся своей вариативностью, многообразием подходов к их созданию и реализации. Существенным изменениям подвергается и школьный курс математики. В качестве одной из моделей личностно ориентированного образовательного процесса при обучении математике нами выбран деятельностно-смысловой подход [1], который рассматривается как один из способов развития личности учащихся путем «понимающего усвоения предмета» [2].

Понимающее усвоение математики разрабатывается Э.К. Брейтигам, Е.И. Лященко, В.М. Туркиной, Е.В. Пономаревой и др. Для его обеспечения мы выбрали установленные Э.К. Брейтигам следующие критерии: 1) целостность и системность содержания и его знакового представления; 2) постижение различных аспектов (логико-семиотического, структурно-предметного и личностного) смысла математических понятий (фактов); 3) направленность процесса обучения математике на приобретение личностного опыта (соотнесение нового с наличным опытом; осмысление деятельностной предыстории понятия; личностное отношение к понятию, включая эмоциональный опыт; опыт оперирования с ним) [1].

Выбрав в качестве критериев понимания при обучении математике перечисленные выше положения, остановимся на условиях, способствующих понимающему усвоению материала. К ним мы отнесли: генетическое структурирование учебного материала, диалогизацию содержания, интеграцию различных форм представления содержания математических понятий (словесной, знаково-символической, графической); использование информационно-коммуникационных технологий для наглядного представления основной идеи (сущности, чаще всего совпадающей со структурно-предметным аспектом смысла) изучаемого математического понятия факта или явления.

В связи с тем, что курс математики старшей школы можно представить в виде системы математических понятий и их свойств, рассмотрим организацию понимающего усвоения материала на примере изучения основных понятий темы «Логарифмическая и показательная функции». Наш выбор обусловлен тем, что знания учащихся по данной теме при традиционном изучении материала часто носят формальный характер. Понятия «логарифма» и «степени с иррациональным показателем» не становятся «своими» понятиями для учащихся при таком подходе. Подтверждением служат результаты ЕГЭ по математике (например по Томской области за 2001–2005 гг., по Алтайскому краю за период с 2002 по 2005 г.).

Изучение логарифмической и показательной функций в классах с повышенным и базовым уровнем математической подготовки начинаем с рассмотрения натуральной логарифмической функции. Ее введение мы строим с использованием интеграла с переменным верхним пределом сразу же после рассмотрения темы «Определенный интеграл и его приложения». Такой подход позволяет сохранить целостность всего курса алгебры и начал анализа и установить внутренние взаимосвязи между отдельными темами. В классах с повышенным уровнем математической подготовки материал рассматривается со строгим доказательством свойств ведущих понятий и теорем об основных фактах темы. В классах с базовой математической подготовкой нами выбран иллюстративно-наглядный уровень строгости изложения материала.

Содержание темы «Логарифмическая и показательная функции» строится по генетическому принципу. Основным системообразующим понятием, «клеточкой, в дальнейшем развивающейся в систему» [3] при таком построении учебного материала является понятие натуральной логарифмической функции, а не понятие логарифма как при традиционном структурировании учебного материала. Выбор образовательного объекта темы обусловлен следующими причинами:

– «простая» система обозначений и возможность геометрического, наглядного истолкования значений;

– возможность представления всех логарифмических функций через натуральную логарифмическую функцию;

– наличие всех основных характеристических свойств функций данного класса;

– широта применимости этого вида функции по сравнению с логарифмическими функциями по любому другому основанию.

Генетическое структурирование дает возможность учащимся выйти на новый уровень усвоения материала. Оно «позволяет обучаемым самостоятельно ориентироваться в изучаемом предмете. Формирующееся в результате обобщенное знание становится средством для решения практических и теоретических задач по предмету» [3].

Введение натуральной логарифмической функции «через интеграл», с одной стороны, дает возможность использовать производную и интеграл в качестве инструмента изучения функции, выявления ее новых свойств. С другой стороны, рассмотрение и изучение натуральной логарифмической функции как основного системообразующего понятия при изучении всего класса логарифмических и показательных функций способствует преодолению формализма при усвоении понятий натурального логарифма и соответствующей функции. Преодоление формализма в знаниях учащихся осуществляется за счет: 1) установления внутренних связей между отдельными темами курса «Алгебра и начала анализа» («Производная», «Определенный интеграл и его приложения», «Логарифмическая и показательная функции»); 2) расширения наглядных представлений основных понятий темы; 3) выделения простейшего системообразующего понятия в теме – натуральной логарифмической функции как главного материала темы.

Изучение темы осуществляется по следующему плану:

1. Интегральное определение натуральной логарифмической функции, изучение ее свойств и построение графика.

2. Введение и изучение логарифмической функции по произвольному основанию.

3. Степень с действительным показателем.

4. Введение и изучение показательной функции как обратной к логарифмической.

Выявим, в чем заключается понимание понятия «натуральная логарифмическая функция» на каждом из этапов формирования данного математического понятия.

Первый этап включает актуализацию тех сведений, которые необходимы для сознательного усвоения нового материала. К ним относятся свойства первообразной и определенного интеграла, свойство аддитивности площади, обращение к имеющемуся опыту решения задач по вычислению площадей криволинейных трапеций. Актуализации вышеперечисленных знаний способствует решение специально подобранных задач:

1. Вычислите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 1$, осью абсцисс и прямыми $x = -1$ и $x = 3$.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin x$ и осью абсцисс.

3. Найдите площади криволинейных трапеций, ограниченных осью абсцисс, графиком гиперболы $y = \frac{1}{t}$, прямыми $t = 1$ и $t = b$, где b в каждом отдельном случае некоторое фиксированное число из интервала $(0, +\infty)$.

На этапе мотивации совместно с учащимися формулируем учебную задачу о существовании площадей получившихся фигур (задача № 3), их выражении через интеграл.

Третий этап – введение определения. Остановимся на методических приемах, применяемых на данном этапе. Средством принятия и осознания учащимися задачи о нахождении площадей криволинейных трапеций, ограниченных осью абсцисс, графиком гиперболы $y = \frac{1}{t}$ прямыми $t = 1$ и $t = b$, где b в каждом отдельном случае некоторое фиксированное число из интервала $(0, +\infty)$ нами избран диалог. В процессе диалога, в котором ведущая роль принадлежит учителю, выясняется, что площадь криволинейной трапеции можно вычислить с помощью определенного интеграла, но на данный момент учащиеся не знают первообразной для функции $y = \frac{1}{t}$. Поэтому для нахождения численного значения интеграла мы пользуемся компьютерной программой. В ходе диалога устанавливается, что каждому фиксированному $x \in (0, +\infty)$ ставится в соответствие площадь криволинейной трапеции. Площадь, с другой стороны, равна значению интеграла $\int_1^x \frac{dt}{t}$. Затем делается вывод о том, что получено функциональное соответствие, т.е. $\int_1^x \frac{dt}{t}$ можно считать функцией. Подводя итог, учитель сообщает, что в математике эту функцию называют натуральной логарифмической функцией.

На осознании того, что $\int_1^x \frac{dt}{t}$ есть функция действительного переменного x, в значительной мере базируется понимание определения натуральной логарифмической функции (структурно-предметный аспект смысла понятия). Понимание закона соответствия между числовыми множествами, описываемого с помощью натуральной логарифмической функции: число – площадь фигуры под гиперболой – также свидетельствует о становлении структурно-предметного аспекта смысла понятия. В знаково-математическом представлении $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ зафиксирован логико-семиотический аспект смысла данного понятия: обозначение «ln» – это сокращенное название натуральной логарифмической функции, переменная x, стоящая под знаком логарифма, является аргументом этой функции.

Четвертый этап – этап усвоения определения понятия. Нами выделяются основные объекты, изучаемые в курсе анализа: число и функция. На этапе усвоения определения учащиеся, каждый по-своему, устанавливают абстрактные связи введенного понятия с этими объектами. Данные связи носят непроизвольный характер. Поэтому с помощью следующей системы вопросов мы проводим коррекционную работу:

1. К объектам какого рода можно отнести $\int_1^x \frac{dt}{t}$?

2. Почему $\int_1^x \frac{dt}{t}$ можно считать функцией? Что является аргументом в данной функции? Каково геометрическое представление аргумента?

3. К объектам какого рода можно отнести значение натуральной логарифмической функции в некоторой точке x? Приведите примеры.

4. Какова геометрическая интерпретация натурального логарифма некоторого положительного числа x?

Установление таких связей свидетельствует о формировании структурно-предметного аспекта смысла понятия. На данном этапе складывается представление о том, что $\int_1^x \frac{dt}{t}$ есть функция действительного переменного x. В процессе диалога, рассматривая случаи, когда вторая прямая $x = c$, проходит через точку c из (0; 1), выясняется, что получившиеся фигуры имеют те же площади, что и фигуры, образованные осью абсцисс, графиком гиперболы $y = \frac{1}{t}$, прямыми $x = 1$ и $x = \frac{1}{c}$ (например, при $x = \frac{1}{2}$ и $x = 2$, $S \approx 0.69$; при $x = \frac{1}{3}$ и $x = 3$, $S \approx 1.1$ и т.д.).

Используя свойство интеграла $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, нами совместно с учениками устанавливается, что $\int_1^x \frac{dt}{t}$, где $x \in (0;1)$ принимает отрицательные значения, т.е. $\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t} \approx 0.69$; $\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{t} = -\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dt}{t} \approx -1.1$ и т.д.

С геометрической точки зрения, знак «минус» указывает на то, что фигуры лежат левее прямой $x = 1$. В случае $x = 1$ получается фигура нулевой площади. Интерпретация (в форме геометрического представления) понятия «натуральная логарифмическая функция» позволяет судить о понимании ими определения и его обозначения.

Пятый этап – установление связей рассматриваемого понятия с ранее изученными понятиями. Установление связей происходит через изучение свойств натуральной логарифмической функции. Доказывая теорему о том, что функция $y = \ln x$ непрерывна, возрастает, выпукла вверх, учащиеся устанавливают связи между непрерывностью и дифференцируемостью натуральной логарифмической функции; характером монотонности функции и знаком ее производной; обращенностью графика функции выпуклостью вверх или вниз и знаком ее второй производной. Аналитически доказывая, что для $a > 0, x > 0$ $\ln ax = \ln a + \ln x$, устанавливается взаимосвязь с понятием первообразной функции. За счет сравнения и установления аналогий с изученными ранее элементарными функциями, выявления и проговаривания на уроке различных аспектов смысла понятия «натуральная логарифмическая функция» у учащихся происходит формирование *целостного образа* этого понятия.

Шестой этап – применение рассматриваемого понятия внутри изучаемой темы. О понимании на данном этапе можно судить по свободному оперированию учащимися определением и свойствами натуральной логарифмической функции при доказательстве ее свойств по произвольному основанию; использованию формулы перехода от одного основания к другому; по широкому применению логарифмического представления единицы в решении уравнений и неравенств; по использованию учащимися различных способов решения уравнений и неравенств.

Седьмой этап – рефлексия приобретенного опыта. Рефлексивная деятельность учащихся организуется нами следующим образом: ученикам предлагается составить схему изучения темы «Натуральная логарифмическая функция», написать сочинение об изученной функции, ответить на вопросы. По осознанности учащимися выбора того или иного способа решения, умению обосновать выбор способа решения задачи можно судить о понимании на данном этапе.

Далее остановимся кратко на выявленных нами аспектах смысла понятий «логарифмическая функция по произвольному основанию» и «показательная функция». Логарифмическая функция по произвольному основанию определяется в данном методическом подходе через натуральную логарифмическую функцию, как функция $y = \frac{\ln x}{\ln a}$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и обозначается $y = \log_a x$ (логико-семиотический аспект смысла). Структурно-предметный аспект смысла данного понятия состоит в идентичности свойств данной функции со свойствами натуральной логарифмической функции. Данная особенность позволяет сформировать общий целостный взгляд на класс логарифмической функции. Показательная функция в избранном методическом подходе вводится как обратная к логарифмической (структурно-предметный аспект смысла понятия).

Проведение такой работы над содержанием и основными понятиями темы «Логарифмическая и показательная функции» дает возможность:

– сохранить целостность и системность содержания курса алгебры и начал анализа за счет соблюдения следующих условий: 1) исследование изучаемых функций проводятся по общему плану исследования элементарных функций с опорой на одну теоретическую базу с использованием единого инструментария (дифференциального и интегрального исчисления); 2) выделения основного системообразующего понятия в теме – натуральной логарифмической функции; 3) «типичности» основных характеристических свойств функций данного класса;

– установить внутренние смысловые связи между основными понятиями темы (натуральная логарифмическая функция, логарифмическая функция по произвольному основанию, показательная функция), т.е. нацеливает на понимание;

– сформировать специфические операционные умения по выполнению преобразований над логарифмическими выражениями; в частности, учащиеся достаточно свободно применяют формулу перехода от одного основания логарифма к другому;

– обосновать все основные свойства функций (непрерывность, монотонность и др.) при изучении класса логарифмических и показательных функций;

– расширить наглядные представления основных понятий темы, использовав информационно-коммуникационные технологии для представления, в частности, функции переменной площади; геометрической интерпретации иррационального числа «*e*», понятия «натуральный логарифм некоторого положительного числа *x*»;

– осознанно воспринимать учащимся новую форму представления числа, например, $\log_2 5$ (логико-семиотический аспект смысла понятия «логарифм некоторого положительного числа»);

– создать математическую модель, которая более приближена к практике применения, так как натуральные логарифмы шире используются в решении различных практических задач, в технических расчетах.

Апробация работы по выявлению учащимися различных аспектов смысла основных понятий темы «Логарифмическая и показательная функции» была проведена в Алтайском краевом педагогическом лицее и ряде школ г. Барнаула.

Литература

1. Брейтигам Э.К. Деятельностно-смысловой подход в контексте развивающего обучения старшеклассников началам математического анализа: Моногр. Барнаул, 2004.
2. Лященко Е.И. К проблеме понимания в обучении математике // Проблемы и перспективы развития методики обучения математике: Сб. науч. работ, представленных на 52-е Герценовские чтения / Под ред. В.В. Орлова. СПб., 1999.
3. Системно-структурный подход к построению курса химии / Под ред. Е.М. Соколовской, Н.Ф. Талызиной. М., 1983.

Д.В. Смолякова

УЧЕБНЫЕ ТЕКСТЫ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ КАК СРЕДСТВО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО ВОСПИТАНИЯ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Томский государственный педагогический университет

Изучение истории любого школьного предмета является одной из важнейших составляющих процесса образования, формирования личности школьника.

Вопросы использования элементов истории математики в школе, актуальность этой работы неоднократно обсуждались в методике преподавания (Е.С. Березанская, Г.И. Глейзер, Б.В. Гнеденко, К.А. Малыгин и др.).

Так, Т.А. Иванова [1] подчеркивает, что история математики позволяет увидеть «живую математику», «математику с человеческим лицом», а не сухую, застывшую абстрактно-дедуктивную систему; глубже осознать гносеологический процесс познания в математике, методы научного познания, характерные для каждого этапа, понять динамику их развития.

Насколько сегодня, в условиях реальной школы, востребованы элементы истории математики? Как учителя и ученики оценивают значение таких материалов? Какую форму их предъявления предпочитают? Какие учебные тексты используются в действующих учебниках по математике?

С целью ответа на эти вопросы, с одной стороны, было проведено эмпирическое исследование запросов учителей и учащихся в историческом материале и, с другой стороны, проанализированы действующие школьные учебники по математике.

Исследование проводилось в форме анкетирования, интервьюирования, бесед с учащимися и учителями. В нем приняли участие учащиеся 5, 7, 8, 9, 11-х классов (270 человек) лицея № 7, гимназии № 2 г. Томска, а также учителя названных общеобразовательных учреждений.

Результаты показали, что учителя видят необходимость в привлечении элементов истории математики в процесс обучения как средства повышения интереса к предмету (28 %); расширения кругозора учащихся (25 %); более глубокого понимания изучаемой темы (22 %). Учителя, работающие в интеллектуальноемких технологиях (10 %), указали роль элементов истории математики в создании устойчивых представлений об изучаемых понятиях, в расширении способов кодирования информации, в развитии значений изучаемых терминов, т.е. как одного из возможных вариантов организации познавательной деятельности учащихся по освоению учебного материала.

Обратимся теперь к ответам учащихся. Они хотели бы иметь такие исторические материалы, которые: «содержали бы историю происхождения терминов, их обозначений», «показывали бы, как в истории науки подходили к тому или иному выводу формул, правил», «показывали бы, как делались великие открытия, как зарождалась и развивалась математика», «содержали бы способы и алгоритмы решений задач, используемые ранее», «содержали бы биографии великих ученых», «содержали бы исторические задачи и смешные истории». Таким образом, учащихся интересуют активные формы предъявления исторического материала.

Следовательно, школьникам нужны не просто исторические факты на уроках математики как факты, а необходимы такие учебные тексты, задания, которые учили бы их анализировать материалы истории, обогащали умственный опыт, учили устанавливать связи времен.

Результаты проведенного исследования показали необходимость использования исторического материала, его востребованность. Причем одной из задач, выявленных по результатам исследования, стал поиск форм предъявления элементов истории математики и определение целей использования исторического материала. В связи с этим интерес представило обращение к учебно-методической литературе, содержащей исторические материалы. В частности,