

затрат, чем разработка курса на другой информационной основе. Использование в учебном процессе электронной почты также является сравнительно простым делом и не требует больших затрат. При этом основной материал в напечатанном виде, дополненный аудио- и видеопродукцией, доставляется обучаемому по обычной почте, а электронная почта используется им для получения самых свежих, современных материалов по изучаемому предмету, для оперативной пересылки из образовательного учреждения какой-то дополнительной информации и методических пособий. При такой организации обучения, базирующейся на использовании case-техно-

логии и электронной почты, опосредующим звеном между обучаемым и образовательным учреждением может быть оборудованный средствами вычислительной техники образовательный центр вблизи от места проживания обучаемого, который в данном случае выступает как полномочный представитель образовательного учреждения. Такими образовательными центрами могут быть как специализированные центры ДО, скажем на базе филиальной сети и пунктов заочного обучения самого образовательного учреждения, так и сторонние образовательные заведения, с которыми у образовательного учреждения существуют соответствующие договора.

Литература

1. Новожилов Э.Д., Обухов А.В. Краткий обзор некоторых аспектов дистанционного образования // Вестник ТГПУ. Серия: Естественные и точные науки. Вып. 5. 1998. С. 58–60.
2. Управление современным образованием: социальные и экономические аспекты / Под ред. А.Н. Тихонова. М.: Вита Пресс, 1998. С. 117.

УДК 378.02: 378.8

Н.Г. Подаева

ГРАВИТАЦИЯ И НЕОДНОРОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ

Елецкий педагогический институт

Предлагаемая вашему вниманию статья способствует решению назревшей в процессе обучения геометрии в педвузе методологической проблемы соотношения геометрии и физической реальности. В контексте этой проблемы выступает классическая идея «дополнительности геометрии и физики», поставленная и глубоко проанализированная А. Эйнштейном в теории относительности.

В соответствии с идеей дополнительности геометрии и физики собственно геометрические понятия (метрические свойства, свойства симметрии, топологические и порядковые свойства и т.п.) рассматриваются как понятия физической геометрии – опытной науки, являющейся, по сути, самой древней отраслью естествознания. Идеальным объектам математики в физической теории ставятся в соответствие практически твердые тела физики. Геометрическое пространство интерпретируется как пространственно-временной континуум реального мира событий. «Согласно выдвинутому здесь взгляду вопрос о том, имеет ли этот континуум евклидову, риманову или какую-либо другую структуру, является вопросом физическим, а не вопросом соглашения о выборе на основе простой целесообразности» [1].

Согласно «пути Эйнштейна» развития физических теорий в целях возможного упрощения арсенала физических понятий осуществляется усложнение принятой геометрической модели и математического аппарата. В результате появляются такие абстрактные математические понятия, как псевдоевклидово пространство, псевдориманово пространство, тензор кривизны и т.п.

По Эйнштейну вокруг массивных тел пространство-время искривлено, и только по этим «геодезическим кривым» может осуществляться всякое движение, в том числе и световых лучей. Пространство обладает упругостью, в него как бы «втиснуты» физические тела, искривляющие его. Таким образом, физическое понятие гравитации заменено математическим определением кривизны 4-мерного пространства-времени при помощи 10-параметрического тензора. В ОТО «материя исчезла, остались одни уравнения» [2].

Великий ученый современности Р. Фейнман (США, умер в 1988 г.), бесспорно признавший теорию Эйнштейна, сказал: «Гравитацию пока нельзя объяснить никакими другими явлениями» [3], имея в виду то, что Эйнштейн для математи-

ческого удобства заменил в ОТО физический смысл гравитации геометрическим понятием – кривизной пространства-времени*.

В развитии теории физического познания все понятия можно условно классифицировать как *геометрические* и *негеометрические*. К первым относятся свойства пространства-времени, ко вторым – движение, причинность, воздействие и др. Однако можно провести аналогию между некоторыми свойствами пространства-времени (геометрическими свойствами материи) и отдельными негеометрическими понятиями:



Согласно принципу дополнительности геометрии и физики усложнение геометрических понятий [геометрической части описания (Г)+(Ф)] ведет к упрощению негеометрической части. Так, в общей теории относительности введение понятий и положений неевклидовой геометрии риманова пространства позволило вскрыть единство инерции и тяготения, вывести уравнения движения из уравнений поля и т.д. Математический аппарат ОТО, основанный на формализме понятий римановой геометрии и тензорного анализа (причем роль основной группы преобразований играет группа всех гомеоморфизмов), является сложным с аналитической точки зрения. В то же время физическая часть описания является сравнительно простой.

Таким образом, следуя идее дополнительности геометрии и физики, мы проводим соответствие между понятиями геометрии и физики. Причем можно указать два аспекта этого соответствия. При первом (эмпирическом) геометрические понятия интерпретируются с помощью соответствующего класса эмпирических объектов и процессов (твердые тела, световые лучи и т.п.). Этот аспект реализуется в СТО, где подчеркивается связь понятия одновременности с эмпирическим процессом распространения света в пустоте, роль твердого тела в эмпирической интерпретации геометрии и др. При втором аспекте (семантическом), реализуемом в ОТО, геометрическая модель (пространство-время) получает семантическую интерпретацию в рамках физической картины мира. В результате обнаруживается тесная связь понятия пространства-времени с понятиями физического поля, тяготения, массы, инерции и т.д. Таким образом, в ОТО происходит геометризация важного понятия, выражающего физическую реальность, – понятия тяготения.

Итак, геометризация физики предполагает семантическую интерпретацию геометрического понятия пространства-времени с помощью понятий физического поля, тяготения, массы, инерции и др. При этом не только физика геометризуется, но и геометрия наполняется реальным физическим содержанием: понятие движения в физике объясняется геометрически как происходящее по некоторым кривым принятой физической геометрии; материальные частицы рассматриваются как аспекты поля, сливающегося с геометрическим пространством-временем, и т.д.

В этой связи следует отметить, что методологическая проблема дополнительности геометрии и физики тесно связана с диалектическим противоречием логики и интуиции в мышлении, аксиоматической и конструктивной процедур в математике, чувственного и рационального в научном познании, с проблемой асимметрии полушарий головного мозга, а также с диалектикой абсолютной и относительной истины. Дополнительность геометрии и физики может рассматриваться «как одно из проявлений диалектического характера процесса научного познания в его стремлении ко все более полному и адекватному отражению действительности» [4].

Ниже мы предлагаем вашему вниманию содержательный материал одной из лекций курса по выбору «Геометрия и теория относительности»**, цель которой – формирование представлений об основных положениях теории гравита-

* Современная наука, признавая предложенную Эйнштейном кривизну пространства времени законченной теорией гравитации, в то же время утверждает, что носителем гравитационного взаимодействия является еще не открытая элементарная частица – гравитон.

** Спецкурс «Геометрия и теория относительности» разработан нами для студентов физико-математических факультетов педвузов.

ционного поля (ОТО), являющейся теорией пространства-времени.

1. Теория тяготения Ньютона.

В 1687 г. в труде «Математические начала натуральной философии» Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения: любые две частицы с массами m_A, m_B притягиваются друг к другу с силой

$$F = G \frac{m_A m_B}{r^2} \quad (1)$$

G -гравитационная постоянная. По современным данным $G = 6,6745(8) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$. Согласно закону (1) сила тяготения зависит только от положения частиц в данный момент времени, т.е. гравитационное взаимодействие распространяется мгновенно.

При произвольном распределении вещества сила тяготения, действующая в данной точке на пробную частицу, может быть выражена как произведение массы этой частицы на вектор \vec{g} , называемый напряженностью поля тяготения в данной точке. Чем больше \vec{g} по модулю, тем сильнее поле тяготения.

Из закона Ньютона следует, что поле тяготения – потенциальное поле, т.е. его напряженность \vec{g} может быть выражена как градиент* некоторой скалярной величины j , называемой гравитационным потенциалом:

$$\vec{g} = -\text{grad}j. \quad (2)$$

Так, для частицы массы m потенциал поля тяготения

$$\varphi = -G \frac{m}{r}. \quad (3)$$

Если задано произвольное распределение плотности вещества в пространстве $r=r(r)$, то можно вычислить гравитационный потенциал j этого распределения, а следовательно, и напряженность \vec{g} гравитационного поля во всем пространстве. Потенциал j определяется как решение уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho. \quad (4)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Гравитационный потенциал какого-либо тела или системы тел может быть записан в виде суммы потенциалов полей тяготения частичек, составляющих тело или систему (принцип суперпозиции), т.е. в виде интеграла от выражения (3):

$$\varphi = -\int G \frac{dm}{r}. \quad (4 \text{ а})$$

Интегрирование производится по всей массе тела (или системы тел), r – расстояние элемента массы dm от точки, в которой вычисляется потенциал.

Выражение (4 а) является решением уравнения Пуассона (4). Потенциал изолированного тела (системы тел) определяется неоднозначно. Например, к потенциалу можно прибавлять произвольную константу. Однако если потребовать, чтобы вдали от тела, на бесконечности, потенциал равнялся нулю, то потенциал определяется решением уравнения Пуассона однозначно в виде (4 а).

2. Необходимость обобщения закона тяготения Ньютона.

Теория Ньютона предполагает мгновенное распространение тяготения и уже поэтому не может быть согласована с СТО, утверждающей, что никакое взаимодействие не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Поэтому теорию Ньютона нельзя применять в тех случаях, когда применима СТО, т.е. когда гравитационные поля настолько сильны, что разгоняют движущиеся в них тела до скоростей порядка скорости света. Скорость, до которой разгоняется тело, свободно падающее из бесконечности до некоторой точки, равна по порядку величины квадратному корню из модуля гравитационного потенциала φ в этой точке (предполагается, что на бесконечности $(\varphi = 0)$). Таким образом, теорию Ньютона можно применять только в том случае, когда

$$|\varphi| \ll c^2. \quad (5)$$

В полях тяготения обычных небесных тел это условие выполняется. Так, на поверхности Солнца $|\varphi|/c^2 \approx 4 \cdot 10^{-6}$, а на поверхности белых карликов – порядка 10^{-6} .

Обобщение теории тяготения было сделано Эйнштейном в 1915–1916 гг. Новая теория была названа общей теорией относительности.

3. Принцип эквивалентности.

Установленный опытным путем итальянским ученым Г. Галилеем факт, что на поверхности Земли все тела падают под влиянием ее поля тяготения с одинаковым ускорением свободного падения, может быть сформулирован как принцип строгой пропорциональности гравитационной массы m_g , определяющей взаимодействие тела с полем тяготения и входящей в закон (1), и инертной массы m_n , определяющей сопротивление тела действующей на него силе и входящей во второй закон механики Ньютона. Уравнение движения тела в поле тяготения записывается в виде:

* Градиентом поля тяготения называется вектор F . 4.

$$m_H \vec{a} = \vec{F} = m_T \vec{g}, \quad (6)$$

где a – ускорение, приобретаемое телом под действием напряженности \vec{g} гравитационного поля. Если m_H пропорционально m_T и коэффициент пропорциональности одинаков для всех тел, то можно выбрать единицу измерения так, что этот коэффициент станет равным единице, $m_T = m_H$; тогда в уравнении (6) массы сокращаются и ускорение \vec{a} не зависит от массы, \vec{a} равно напряженности \vec{g} поля тяготения, в согласии с законом Галилея.

Таким образом, тела разной массы и природы движутся в заданном поле тяготения совершенно одинаково, если их начальные скорости одинаковы. Это позволяет провести аналогию между движением тел в поле тяготения и движением тел в отсутствие тяготения, но относительно ускоренной системы отсчета. Так, в отсутствие тяготения тела разной массы движутся по инерции прямолинейно и равномерно. Если наблюдать эти тела, например, из кабины космического корабля, который движется вне поля тяготения с постоянным ускорением за счет работы двигателя, то по отношению к кабине все тела будут двигаться с постоянным ускорением, равным по величине и противоположным по направлению ускорению корабля. Движение тел будет таким же, как падение с одинаковым ускорением в однородном постоянном поле тяготения. Силы инерции, действующие в ускоренном космическом корабле, летящем с ускорением, равным ускорению свободного падения у поверхности Земли, неотличимы от сил гравитации, действующих в истинном поле тяготения в корабле, стоящем на поверхности Земли. Следовательно, силы инерции в ускоренной системе отсчета (связанной с космическим кораблем) эквивалентны гравитационному полю. Этот факт выражается *принципом эквивалентности Эйнштейна*.

Согласно этому принципу можно осуществить и процедуру, обратную описанной выше имитации поля тяготения ускоренной системы отсчета, а именно можно «уничтожить» в данной точке истинное гравитационное поле введением ускоренно движущейся системы отсчета. Так, хорошо известно, что в кабине космического корабля, свободно (с выключенными двигателями) движущегося вокруг Земли в ее поле тяготения, наступит состояние невесомости – не проявляются силы тяготения (рис. 1).

«Сильный принцип эквивалентности» Эйнштейна состоит в том, что не только механические, но и все физические процессы в истинном поле тяготения и в ускоренной системе в отсутствие тяготения протекают по одинаковым законам.

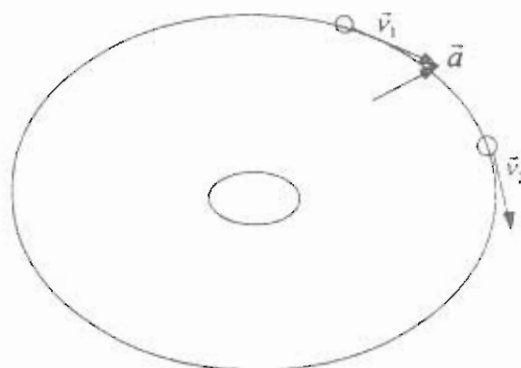


Рис. 1

4. Теория тяготения Эйнштейна.

Эйнштейн показал, что если, исходя из принципа эквивалентности, потребовать, чтобы истинное гравитационное поле было эквивалентно локальным соответствующим образом ускоренным в каждой точке системам отсчета, то в любой конечной области пространство-время окажется искривленным псевклидовым.

В СТО в ИСО квадрат расстояния запишется в виде квадратичной формы

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad (7)$$

где t – время, x, y, z – *прямоугольные декартовы координаты*. Эта система называется *галилеевой*.

Если ввести любые криволинейные координаты, то ds^2 будет выражаться общей квадратичной формой:

$$ds^2 = \sum g_{ij} dx_i dx_j, \quad (8)$$

С физической точки зрения переход к криволинейным координатам означает переход от ИСО к системе, движущейся с ускорением, деформирующейся и вращающейся.

В ОТО пространство-время не плоское, а искривленное. В нем нельзя ввести декартовы координаты, и использование криволинейных координат становится неизбежным. Зная g_{ij} как функции четырех координат, можно определить все геометрические свойства пространства-времени.

Теория гравитационного поля, или ОТО, одновременно является теорией пространства-времени и служит базой современной космологии. В малых пространственно-временных областях (локально) она переходит в СТО (специальную теорию относительности) и, следовательно, служит обобщением последней.

Установленной еще Галилеем характеристикой гравитационного поля является равенство ускорений любых тел, движущихся в одинаковых

полях тяготения. Так как все тела под действием поля тяготения движутся с одинаковым ускорением (например с ускорением свободного падения), то чем больше масса тела, тем большая сила тяготения на него воздействует. Это значит, что инертная и гравитационная массы тела равны. Этот фундаментальный факт, установленный в наше время с точностью до 10^{-11} , является *первым постулатом теории тяготения*.

В СТО все многообразие механических, электродинамических и других явлений оказалось относенным к четырехмерному псевдоевклидову пространству E_4 с метрикой $q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ интервал в котором запишется

$$ds^2 = q(d\vec{r}) = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij} dx_i dx_j, x_4 = ct, \quad (9)$$

т.е. матрица $A = [a_{ij}]$ квадратичной формы в ортонормированом базисе имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Переход к неинерциальной системе (т.е. к системе, движущейся неравномерно и непрямолинейно) связан с переходом к некоторой криволинейной системе координат u_μ , связанной с галилеевыми координатами x_α некоторым законом преобразования:

$$x_\alpha = x_\alpha(u_\mu); u_\mu = u_\mu(x_\alpha); a, \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

Преобразуя интервал (9) с помощью (10), мы получим

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} du_\mu du_\nu, \quad (11)$$

где компоненты метрического тензора имеют следующий специальный вид:

$$g(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_{i,j=1}^4 a_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial u_\mu} \frac{\partial x_j}{\partial u_\nu} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\mu} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_\nu}. \quad (12)$$

Метрический тензор представляет собой билинейную форму:

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\mu,\nu=1}^4 g_{\mu\nu} u_\mu u_\nu, \quad (13)$$

где $\vec{x} = \vec{x}(u)$, $\vec{y} = \vec{y}(v)$, $i=1, 2, 3, 4$, т.е. определяется десятью компонентами $g_{\mu\nu}$ (так как матрица $G=[g_{\mu\nu}]$ симметрическая).

Второй постулат теории тяготения следующий: так как поля сил инерции и тяготения ло-

кально неразличимы, то информация о гравитационном поле, так же как и о силах инерции, должна содержаться в метрическом тензоре $g_{\mu\nu}$, который в теории тяготения играет роль потенциала. Если гравитационного поля нет (т.е. имеется поле сил инерции), то компоненты метрики имеют специальный вид (12), позволяющий перейти от (11) обратно к выражению интервала (9), т.е. от НС (неинерциальной системы) к ИС (инерциальной системе), и тем самым устранить силы тяготения во всем пространстве.

Если присутствует поле тяготения, то компоненты $g_{\mu\nu}$ метрического тензора теряют свой специальный вид (12), и тогда никакими преобразованиями координат нельзя свести выражение (11) во всем пространстве к выражению (9), т.е. невозможно ввести единую инерциальную систему отсчета. Геометрически это означает, что пространство перестало быть плоским.

В силу этого результата мы приходим к решающему выводу: *пространство, в котором есть гравитационное поле, - не плоское*. Тяготение проявляется в искривлении пространства, и этим гравитационное поле резко отличается от всех остальных полей.

Источником гравитационного поля, т.е. причиной, порождающей искривление пространства-времени, являются движущиеся массы и любые поля. Распределение и движение масс, а также динамические характеристики любых полей описываются, как известно, *тензором энергии-импульса* $T_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$). Компонент T_{11} задает плотность энергии (массы), а остальные - плотность потока энергии (массы), количества движения.

Таким образом, источником гравитационного поля является сложная величина - движущиеся массы и любые поля. Потенциал поля описывается десятью компонентами тензора $g_{\mu\nu}$.

В декабре 1915 г.* Эйнштейн дал окончательную формулировку уравнений гравитационного поля [СНГ, т. 1, с. 448]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{g\kappa k}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (14)$$

Эти уравнения в общеквариантной (сопреобразующейся) форме выражают то, что распределение и движение любых видов материи (плотность распределения источников описывается стоящим в правой части тензором $T_{\mu\nu}$ энергии-импульса, куда входят все виды энергии, кроме гравитационной) порождает кривизну пространства-времени. Характеристики кривизны пространства-времени содержит левая часть, а именно *тензор Риччи*:

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} R_{\mu\sigma\nu\sigma}$$

* После почти восьми лет поисков.

который представляет собой сумму компонентов тензора кривизны $R_{\mu\nu\sigma}$.

Тензор кривизны сложным образом зависит от компонентов $g_{\mu\nu}$ метрического тензора и их первых и вторых производных [5];

$$R_{mkn} = \sum_{\alpha} g_{\alpha n} \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^{\alpha}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^{\alpha}}{\partial x_m} + \sum_p (\Gamma_{lp}^{\alpha} \Gamma_{km}^p - \Gamma_{mp}^{\alpha} \Gamma_{kl}^p) \right)$$

В левую часть также входит скалярная кривизна

$$R = \sum_{\mu, \nu=1}^4 g_{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

В случае двумерного пространства постоянной кривизны (например сферы) она равна

$$\frac{1}{r^2} \text{ где } r - \text{ радиус сферы.}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. Каковы основные положения теории тяготения Ньютона?
2. Чем обусловлена необходимость обобщения закона тяготения Ньютона?
3. В чем состоит принцип эквивалентности Эйнштейна?
4. Как выражается квадрат расстояния в галилеевых координатах и в криволинейных координатах?
5. Сформулируйте постулаты теории тяготения.
6. Обоснуйте положение: «пространство, в котором есть гравитационное поле, не является плоским».

7. Напишите уравнение гравитационного поля.

8. Как связан тензор Ричи с тензором кривизны?

В заключение следует отметить, что следствием теории относительности Эйнштейна, трактующей гравитацию как кривизну пространства-времени*, является вывод о взорвавшейся из точки и раздувающейся конечной Вселенной с последующим ее распадом на фотоны и электроны.

В 1915 г. рядовой немецкой армии Карл Шварцшильд, решая уравнения Эйнштейна, теоретически открыл возможность образования черных дыр. Черная дыра (сингулярность) – это область пространства-времени, кривизна которого, согласно ОТО, при гравитационном сжатии превошла критический радиус, а время остановилось. Согласно теории Большого Взрыва Вселенной вся субстанция Вселенной приблизительно 12 млрд лет назад находилась в таком (сингулярном) состоянии в одной точке. Большой Взрыв ее дал начало образованию галактик, которые, по закону Хаббла, продолжают ускоренно разлетаться в нашей расширяющейся Вселенной. Причины Большого Взрыва неизвестны.

Для самого Эйнштейна такое открытие Шварцшильда оказалось неожиданным и вызвало у него «величайший интерес». А уже в 20-х гг. он был просто потрясен, когда в России рядовой инженер Александр Фридман, решая все те же уравнения Эйнштейна, создал теорию расширяющейся Вселенной.

Литература

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. II. М., 1967. С. 87.
2. Ленин В.И. Материализм и эмпириокритицизм.
3. Фейнман Р. Характер физических законов. М.: Наука, 1987.
4. Мостепаненко А.П. «Дополнительность» физики и геометрии // Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. М.: Наука, 1979. С. 240.
5. См.: Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере. М.: Наука, 1974.

* Пространство как бы обладает упругостью, куда «втиснуты» физические тела.