ПУТИ ИЗМЕНЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ ШКОЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Б.Д. Пайсон

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ ВЫДЕЛЕНИЯ ЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПРЕДМЕТНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Барнаульский государственный педагогический университет

Выделение логической структуры математического материала с методической точки зрения может рассматриваться в двух аспектах. Во-первых, это опора, с помощью которой создаются условия для более глубокого и осознанного изучения предметного содержания. Это достигается за счет возможности видеть и понимать способы организации этого содержания, заложенные в логической структуре изучаемого [1, 2]. При этом внимание ученика привлекается не только к тому, «о чем говорится в тексте», но и «из каких частей состоит текст?», «какая между ними связь?» и т.п. Тем самым обеспечивается системность (целостность) представления данной единицы содержания, что способствует ее более глубокому пониманию [3–5], а также усиливается развивающий потенциал образовательной области «Математика» [6]. Кроме того, появляется возможность заведомо корректного изменения изученного математического текста: построения отрицания, переформулировки и т.п.

Во-вторых, при выделении логической структуры может быть получена некоторая логическая схема, изучая и преобразуя которую, можно получать дополнительные знания о данном предметном материале, а также новые логические схемы, которые могут проявляться в других предметных фрагментах и, кроме того, раскрывают общие закономерности дедуктивных рассуждений.

В зависимости от конкретной дидактической ситуации логическая структура может быть формализована в различной степени. Нам удалось выявить следующие уровни указанной формализации в условиях образовательной области «Математика» средней общеобразовательной школы.

На первом уровне – уровне *локального структурирования* – логические элементы еще не выступают в своей роли, а понимаются исключительно и непосредственно как части речи (связки, союзы, частицы и т.п.); выделенные логические элементы не абстрагируются от предметного содержания.

Пример 1. При изучении определения квадратного корня [7, с. 66] для лучшего его понимания целесообразно обратить внимание на две части этого определения: определяемое число неотрицательно; его квадрат равен подкоренному выражению. Такой же момент возникает, скажем, при определении биссектрисы угла [8, с. 12]: это луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла. В этих случаях неявно указывается на конъюнктивную структуру данного определения.

На втором уровне, который мы назвали уровнем *частичной схематизации*, выделяются элементарные предложения, составляющие данную единицу содержания, и логические элементы: союзы (связки) и кванторные словосочетания.

Логическая структура на уровне частичной схематизации может быть зафиксирована по-разному. Это может быть «обычная» запись с явным присутствием логических элементов содержательного предметного языка; может использоваться некоторая «пограничная» символика: скажем, фигурная скобка как обозначение союза «и» (операции «конъюнкция»), знак следования для фиксации структуры импликации или собственно следования. Может применяться и «официальная» логическая символика. Важно подчеркнуть, что все обозначения на этом уровне применяются как эквиваленты соответствующих элементов содержательного языка.

Пример 2: а) Рассмотрим формулировку теоремы: «Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам» [8, с. 97]. Уже только для того чтобы выделить «дано» и «доказать», требуется переформулировка с выявлением импликативной структуры: «если четырехугольник – параллелограмм, то в нем диагонали делятся в точке пересечения пополам» – иначе «неоткуда будет взять» родовое понятие «четырехугольник». Положение усугубляется при конструировании обратной теоремы: без выделения родового понятия «четырехугольник» ее просто не сформулировать.

б) Другим примером частичной схематизации может служить распространенная запись определяющей части определения квадратного корня:

$$\begin{cases} b > 0, \\ b^2 = a. \end{cases}$$

в) Приведем на уровне частичной схематизации формулировку главной части определения функции, возрастающей на некотором множестве: «если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$». Как отмечает Т.Н. Миракова в похожей ситуации, «именно такая “корявая” формулировка заданного простого и понятного предложения необходима для его доказательства…» [9, с. 143]. Заметим, что на данном уровне мы не выделяем специально в формулировке кванторные словосочетания «*для любых* x_1, x_2 *из данного множества*». Это, однако, не означает пренебрежения данными, безусловно важнейшими, элементами логической структуры, которое, в самом деле, чревато возможными ошибками со стороны обучаемых. Имеется в виду, что на данном уровне может быть привлечено внимание лишь к импликативной структуре, а более детальная работа с кванторной структурой должна осуществляться на следующем уровне, о чем будет сказано ниже.

Третий уровень – полная схематизация – достигается при полном выявлении всех логических элементов, входящих в состав единицы содержания и образующих ее логическую структуру. Выделенным логическим элементам явно придается определенное значение логических операций и кванторов вместе с их аппаратом: определением истинностных значений, логическими законами, правилами преобразования. В результате образуется *формализованная схема*, фактически представляющая собой логическую формулу некоторого предметного языка. Формализованная схема – это самый высокий уровень логического структурирования, которого можно достичь, оставаясь в рамках предметного содержания.

Пример 3: а) Тот факт, что $\sqrt{a} = b,$ может быть представлен на уровне полной схематизации так: $(b \ge 0) \wedge (b^2 = a).$

Отсюда, применяя известный закон логики, легко в общем виде получить, что $\sqrt{a} \ne b$ тогда и только тогда, когда $(b < 0) \vee (b^2 \ne a),$ что существенно облегчает выполнение любых действий «на распознавание» квадратного корня.

б) Определяющая часть определения функции, возрастающей на множестве M, в виде формализованной схемы выглядит следующим образом: $(\forall x_1,\ x_2 \in M)\big((x_2 > x_1) \to (f(x_2) > f(x_1))\big).$ О применении такой схемы в определенных дидактических условиях говорится ниже.

Четвертый уровень – самый высокий уровень выделения логической структуры единицы содержания – назовем *формализацией*. На этом уровне входящие в данную единицу содержания элементарные предложения заменяются либо пропозициональными символами логики высказываний, либо «атомарными» символами «чистой» логики предикатов 1-го порядка. Логические элементы окончательно наделяются значениями и символикой, присущими им в формальной логике. Иными словами, в результате формализации образуется *логическая формула*, полностью утратившая предметное содержание и сохранившая от исходной единицы содержания только характер логических связей.

Пример 4. Хорошо известно необходимое условие экстремума функции в точке: «если функция имеет экстремум в некоторой точке (A), то в ней производная равна нулю (B) или ее не существует $(\bar{C})$».

Символически это записывается так: $A \to B \vee \bar{C}.$

Соответствующая же теорема часто доказывается в другой формулировке [10, с. 143]: «Если функция дифференцируема в некоторой точке (C) и имеет в этой точке экстремум (A), то ее производная равна нулю (B)». Символическая запись: $C \wedge A \to \bar{B}.$ Возможные затруднения при переформулировке могут быть сняты преобразованиями по законам логики:

$$C \wedge A \to B \equiv \overline{C \wedge A} \vee B \equiv \left(\bar{C} \vee \bar{A}\right) B \equiv$$
$$\equiv \bar{A} \vee \left(B \vee \bar{C}\right) \equiv A \to B \vee \bar{C}.$$

Мы описали четыре уровня формализации логической структуры предметного содержания образовательной области «Математика».

Попытаемся выделить дидактические ситуации, обусловливающие выход на тот или иной уровень представленности логической структуры конкретной единицы содержания. При этом мы будем следовать двум критериям, описанным в [11, 12]: *методической целесообразности* (создание условий для эффективного решения образовательных задач) и *естественности* (обеспечение «ненасильственного» принятия учащимися предлагаемых им подходов).

Так, работая в течение многих лет в 10-х классах с математической специализацией, мы установили, что определение функции, возрастающей на некотором множестве M, может быть вполне разумно и мотивированно для учащихся представлено в виде формализованной схемы (пример 3, б).

Это позволяет эффективно решать достаточно тонкие в логическом отношении вопросы предметного содержания данного понятия, на наш взгляд, не всегда доступные на более низком уровне выделения логической структуры (см., напр.: [13, с. 13]). Если взять ниже необходимого уровня, то не будут выполнены в полной мере поставленные задачи.

Другие случаи показывают, что если уровень превысить, то окажутся неоправданными затраты на логическое «оформление»; возникают пустая потеря времени и ненужная эксплуатация интеллектуальных ресурсов учащихся; последние будут воспринимать все это с законным недоумением: «...зачем это нужно, когда и так все понятно». В качестве примера необоснованного превышения уровня можно назвать «крайний случай», приведенный Г.В. Дорофеевым [6, с. 137].

Из сказанного следует *принцип минимальности*: всякую учебно-познавательную задачу, связанную с выявлением логической структуры, нужно решать на самом низком уровне, на котором ее можно решить.

Попытаемся, не претендуя на полноту, проанализировать наиболее типичные, по нашему мнению, ситуации, связанные с изучением математического материала, в которых возникают условия для представления логической структуры на разных уровнях.

1. К ситуациям первой группы мы отнесли: первичное уяснение смысла новой единицы содержания; формирование и усвоение понятия; усвоение содержания теоремы; фиксация для запоминания; подготовка к усвоению и возможность воспроизведения изученного факта.

В данных случаях не предполагается преобразований представления единицы содержания. Цель выполнения этих действий – осознать содержание, увидеть связи между его элементами и зафиксировать изучаемый факт в виде конкретного утверждения.

Здесь возможны следующие варианты. Если сама по себе единица содержания имеет относительно несложную структуру, то она может быть представлена на уровне локального структурирования. Для формирования и осознанного усвоения подобной единицы содержания достаточно обратить внимание на характер логических связей между ее элементами (пример 1). В других случаях – если структура сложнее и ее не так просто «охватить полностью» – а это, безусловно, препятствует целостному осознанию соответствующего факта – тогда целесообразно применить частичную схематизацию (пример 2, а). И уже в наиболее сложных случаях возможна фиксация факта на уровне полной схематизации – скорее всего, там, где имеется несколько разноименных кванторов и конъюнктивно-дизъюнктивно-импликативная связь разных уровней.

2. Ситуации второй группы составляют: актуализация данной единицы содержания (подведение под понятие и извлечение следствий в определении, доказательство теоремы, применение данного факта и т.п.); переформулировка изучаемого факта; построение отрицания данного факта; приведение контрпримера.

В этом случае требования к уровню представленности логической структуры могут возрасти. Скажем, для того чтобы выяснить, удовлетворяет ли объект некоторому определению, нужно отчетливо представлять себе характер связи отдельных элементов определяющей части. Поэтому здесь в большинстве случаев требуется уровень не ниже частичной схематизации (примеры 2, б, в). Часто этого уровня оказывается достаточно для «предметной» работы по актуализации фактов. Что же касается таких более «логикоемких» задач, как построение отрицания и приведение контрпримера, то при наличии более или менее обширной практики, приводящей к умению применять законы логики «в свернутом виде», и при несложной логической структуре данной единицы содержания также иногда оказывается возможным ограничиться уровнем частичной схематизации. Вместе с тем при решении таких учебных задач уже гораздо более востребованной оказывается полная схематизация. Представление изучаемого факта в виде формализованной схемы делает его логическую структуру полностью «прозрачной», позволяет видеть все ее компоненты. Тем самым создаются условия для адекватного понимания смысла какого-либо сложносоставленного предложения, выделения условия и заключения теоремы, поиска путей ее доказательства, построение обратного утверждения и т.п. Уровень формализованной схемы часто оказывается востребованным для оценки истинности достаточно сложного утверждения, правильного построения отрицания, приведения контрпримера, т.е. для действий, предполагающих возможность явного применения законов логики (примеры 3, а, б).

Остановимся на таком действии, как переформулировка математического утверждения. Очевидно, что переформулированное утверждение должно быть эквивалентно исходному в общепринятом математическом смысле. Для обеспечения такой эквивалентности требуется значительный математический опыт, который, естественно, далеко не всегда имеется у учащихся. Следствием этого может быть искажение информации при переформулировке: подмена понятий, потеря условий или появление «лишних» условий, неправильное отражение связи элементов и т.п. В такой ситуации весьма действенным и надежным способом получения правильной переформулировки является явное применение равносильных преобразований по законам логики. Разумеется, что при этом логическая структура исходного утверждения должна быть представлена точно и в полном объеме. Это может быть достигнуто на уровне полной схематизации, на котором, как отмечалось выше, доступен весь формально-логический аппарат. Вместе с тем иногда предметный контекст создает своего рода «информационный шум», затрудняющий применение законов логики к формализованным схемам. В данной ситуации оказывается целесообразным и естественным уровень формализации. В подтверждение этого можно еще раз обратиться к примеру 4, описывающему формализацию необходимого условия экстремума функции в точке.

3. Имеются также логико-познавательные задачи, выходящие за рамки собственно предметных. Это, во-первых, изучение собственно логического аппарата. Во-вторых, это фиксация «в общем виде» тех законов логики, которые наиболее распространены и востребованы как в рамках данной предметной области (в нашем случае образовательной области «Математика»), так и в других предметных областях. Такого рода задачи решаются на уровне формализации (доказательство законов логики, вывод правила приведения контрпримера и т.п.). При этом происходит выход из собственно предметной области. Полученные таким образом логические законы, правила и приемы, как сказано выше, оказываются применимыми в разных областях деятельности. Таким образом, средствами образовательной области «Математика» происходит формирование общелогических умений учащихся и тем самым полнее и эффективнее реализуется общекультурный потенциал этого учебного предмета.

Литература

1. Никольская И.Л. О единой линии воспитания логической грамотности при обучении математике // Преемственность в обучении математике. М., 1978.
2. Столяр А.А. Логические проблемы преподавания математики. Минск, 1965.
3. Брейтигам Э.К. Деятельностно-смысловой подход в контексте развивающего обучения старшеклассников началам математического анализа: Моногр. Барнаул, 2004.
4. Зорина Л.Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников. М., 1978.
5. Формирование системного мышления в обучении: Учеб. пос. для вузов / Под ред. З.А. Решетовой. М., 2002.
6. Дорофеев Г.В. Математика для каждого. М., 1999.
7. Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразов. учреждений / Под ред. С.А. Теляковского. М., 1996.
8. Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. средн. школы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. М., 1994.
9. Миракова Т.Н. Гуманитаризация школьного математического образования (методология, теория и практика): Моногр. / Под ред. Г.В. Дорофеева. М., 2000.
10. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 кл. средн. школы / Под ред. А.Н. Колмогорова. М., 1990.
11. Дорофеев Г.В. О некоторых вопросах, связанных с формальным определением комплексных чисел // Углубленное изучение алгебры и анализа: Пос. для учителей. М., 1977.
12. Пайсон Б.Д. О методических критериях выбора уровня строгости при изучении математических понятий // Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки будущих учителей: Межвуз. сб. науч. тр. Барнаул, 1992.
13. Пайсон Б.Д. О логической составляющей образовательной области «Математика» // Математика в школе. 2003. № 2.

Ю.Б. Мельников

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ЧЕРТЕЖ КАК ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Уральский государственный педагогический университет, г. Екатеринбург

Теория моделирования является одним из приоритетных направлений современной науки. Обычно в основе определения понятия «модель» лежит требование соответствия моделирующего объекта моделируемому. В математической логике [1, 2] модель понимается как результат конкретизации теории (таковы, например, модели теорий первого порядка). В прикладных (по отношению к математике) науках господствует противоположный подход: модель обычно понимается как результат абстрагирования от конкретных особенностей моделируемого объекта.

Мы предлагаем иной – формально-конструктивный – подход к определению понятия «модель». А именно под моделью понимается любой «объект», состоящий из двух компонент, называемых **интерфейсной** и **модельно-содержательной** компонентами. Структура интерфейсной компоненты в общем случае не уточняется, фиксируется лишь ее предназначение: обеспечение двусторонней связи между моделируемым и моделирующим объектами (интерфейсная компонента может быть представлена описанием переменных, алгебраических выражений, других обозначений и т.п.). Модельно-содержательная компонента состоит из следующих трех компонент: а) **носитель** – множество объектов, из которых состоит моделируемый объект с точки зрения проводимого исследования; б) **система характеристик** – система функций (однозначных отображений), область определения которых включается в носитель модели (функции с числовыми значениями называются **величинами**); в) **система отношений** на носителе и множестве характеристик, которые обычно задаются предикатами. С этой точки зрения, например, неправомерно говорить: «уравнение… является моделью (такого-то