но выделить следующие отличительные черты, характерные для российских условий:

– продолжительное использование модели «кнута и пряника» и стандартизация моделей мотивации;

– уравнительность в системах оплаты труда и премирования работников, а также сохранение тенденции стимулирования в равном объеме лучшего и худшего;

– необъективная (формальная) оценка трудового вклада, снижение заинтересованности как в индивидуальных, так и в коллективных результатах труда;

– отсутствие представления о возможностях карьерного роста и его связи с реальными трудовыми результатами работника;

– осуществление социального стимулирования преимущественно без учета результатов индивидуального труда (социальными благами коллективного труда пользовались и пользуются в настоящее время все работники);

– распространение систем мотивации и стимулирования прежде всего на рядовых, а не на управленческих работников.

Все эти черты, присущие на протяжении многих лет мотивированию труда, безусловно, не могут не оставить своего отпечатка и на современных подходах к построению моделей трудовой мотивации для отечественных предприятий. Тем не менее следует отметить и достоинства прежних мотивационных систем, которые не утратили своей актуальности и в настоящее время, например такие как внимание к моральным стимулам, а также значение соревнования для повышения социальной и творческой активности работников.

Глубокий и всесторонний анализ различных теорий личности, изучение отечественного и зарубежного опыта, учет специфики переходного этапа позволят избежать одностороннего подхода к построению мотивационной модели, а также огульного отрицания прошлого опыта.

*А.А. Назаров*

# ИССЛЕДОВАНИЕ НЕМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ ЧИСЛА ЛИЦ, ЗАСТРАХОВАННЫХ В ПЕНСИОННОМ ФОНДЕ

Томский государственный университет

## Введение

Пенсионное страхование затрагивает интересы всех без исключения граждан Российской Федерации, поэтому научные исследования, в том числе и методами математического моделирования, этого процесса, несомненно, является актуальной задачей. Важной составляющей пенсионного страхования является соотношение между числом работающих застрахованных лиц и числом пенсионеров.

В данной работе предлагается математическая модель числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, и проводится ее исследование.

1. Математическая модель числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде.

В качестве математической модели можно рассматривать бесконечнолинейную двухфазную систему массового обслуживания (СМО) [1], на вход которой поступает пуассоновский поток заявок с параметром $\lambda$, имеющим смысл среднего значения числа лиц, на которых поданы за единицу времени заявки о регистрации в Пенсионном фонде. В качестве единицы времени можно выбрать календарный день.

Каждый застрахованный в Пенсионном фонде проходит две фазы. Первая соответствует трудовой деятельности застрахованного и уплате страхователем страховых взносов. Вторая соответствует периоду получения пенсии застрахованным, вышедшим на пенсию.

Будем полагать, что продолжительности $\tau_1$ и $\tau_2$ этих фаз случайны и имеют средние значения $M\tau_1 = \dfrac{1}{\mu_1}$, $M\tau_2 = \dfrac{1}{\mu_2}$ и определяются функциями распределения $B_1(x) = P(\mu_1\tau_1 < x)$, $B_2(x) = P(\mu_2\tau_2 < x)$. Очевидно, $B_1(x)$, $B_2(x)$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\infty x dB_1(x) = \int_0^\infty x dB_2(x) = 1.$$

Отметим, что, завершив пребывание на первой фазе, застрахованное лицо переходит на вторую фазу с вероятностью $r$ ($0 < r < 1$), а с вероятностью $1 - r$ покидает систему.

Состояние рассматриваемой СМО обозначим $(i, j)$, где $i$ – число застрахованных лиц на первой, а $j$ – на второй фазе.

Если хотя бы одна из функций распределения $B_1(x)$, $B_2(x)$ неэкспоненциальная, тогда двухмерный случайный процесс $(i(t), j(t))$ изменения во времени состояний $(i, j)$ является немарковским. Исследование таких моделей представляет достаточно сложную задачу и требует привлечения специальных математических методов.

## 2. Исследование системы с конечным числом источников

Для решения поставленной задачи, аналогично работе [2], рассмотрим $N$ – линейную двухфазную СМО с $N$ источниками заявок. Источники функционируют независимо друг от друга следующим образом. Каждый из них в течение времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметром $\frac{\lambda}{N}$, генерирует заявку. Эта заявка в момент окончания ее генерирования отправляется на первую фазу обслуживания, продолжительность которой случайна и определяется функцией распределения $B_1(x)$. Завершив обслуживание на первой фазе, заявка с вероятностью $1 - r$ покидает систему, а источник начинает генерировать новую заявку. С вероятностью $r$, обслуженная на первой фазе заявка переходит к обслуживанию на второй фазе, продолжительность которой также случайная и определяется функцией распределения $B_2(x)$. Завершив обслуживание на второй фазе, заявка покидает СМО, а источник начинает генерировать новую заявку. Распределение вероятностей времени генерирования заявки не зависит от того, после какой фазы покинула систему предыдущая заявка.

Проведем исследование процесса функционирования отдельного источника. Его состояние обозначим $R$, здесь $R = 0$, если источник генерирует заявку, $R = 1$, если его заявка находится на первой фазе обслуживания и $R = 2$ – если на второй.

Случайный процесс $R(t)$ изменения состояний немарковский, поэтому для его исследования воспользуемся методом дополнительной переменной, который описан в работе [3].

В качестве дополнительной переменной $z(t)$ будем принимать остаточное время обслуживания заявки на соответствующей фазе, которая в момент времени $t$ находится на обслуживании.

Обозначим

$$P(0,t)=P(R(t)=0),$$
$$P(1,z,t)=P(R(t)=1,\mu_1 z(t)<z),$$
$$P(2,z,t)=P(R(t)=2,\mu_2 z(t)<z).$$

Для функций $P(0, t)$, $P(1, z, t)$ и $P(2, z, t)$ нетрудно составить систему уравнений [4]

$$P(0,t+\Delta t)=\left(1-\frac{\lambda}{N}\Delta t\right)P(0,t)+$$
$$+(1-r)P(1,\mu_1\Delta t,t)+P(2,\mu_2\Delta t,t)+o(\Delta t),$$
$$P(1,z-\mu_1\Delta t,t+\Delta t)=\frac{\lambda}{N}\Delta tP(0,t)B_1(z)+$$
$$+P(1,z,t)-P(1,\mu_1\Delta t,t)+o(\Delta t),$$
$$P(2,z-\mu_2\Delta t,t+\Delta t)=rP(1,\mu_1\Delta t,t)B_2(z)+$$
$$+P(2,z,t)-P(2,\mu_2\Delta t,t)+o(\Delta t).$$

Откуда, выполнив очевидные преобразования, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P(0,t)}{\partial t}+\frac{\lambda}{N}P(0,t)=\\
&=(1-r)\mu_1\frac{\partial P(1,0,t)}{\partial z}+\mu_2\frac{\partial P(2,0,t)}{\partial z},\\
&\frac{\partial P(1,z,t)}{\partial z}-\mu_1\frac{\partial P(1,z,t)}{\partial z}=\\
&=\frac{\lambda}{N}P(0,t)B_1(z)-\mu_1\frac{\partial P(1,0,t)}{\partial z},\\
&\frac{\partial P(2,z,t)}{\partial z}-\mu_2\frac{\partial P(2,z,t)}{\partial z}=\\
&=r\mu_1\frac{\partial P(1,0,t)}{\partial z}B_2(z)-\mu_2\frac{\partial P(2,0,t)}{\partial z}.
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $\frac{\partial P(1,0,t)}{\partial z}=\left.\frac{\partial P(1,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}$,

$$\frac{\partial P(2,0,t)}{\partial z}=\left.\frac{\partial P(2,z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

В стационарном режиме вероятности $P(0, t)$, $P(1, z, t)$ и $P(2, z, t)$ от $t$ не зависят, поэтому, обозначив $P(0, t) = P(0)$, $P(1, z, t) = P(1, z)$ и $P(2, z, t) = P(2, z)$ систему (1) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{N}P(0)=(1-r)\mu_1\frac{\partial P(1,0)}{\partial z}+\mu_2\frac{\partial P(2,0)}{\partial z},\\
&\frac{\partial P(1,z)}{\partial z}=\frac{\partial P(1,0)}{\partial z}-\frac{\lambda}{\mu_1 N}P(0)B_1(z),\\
&\frac{\partial P(2,z)}{\partial z}=\frac{\partial P(2,0)}{\partial z}-\frac{r\mu_1}{\mu_2}\frac{\partial P(1,0,t)}{\partial z}B_2(z).
\end{aligned}\tag{2}$$

Так как $P(1, 0) = P(2, 0) = 0$, то из (2) получим

$$\begin{aligned}
&P(1,z)=\int_0^z\left[\frac{\partial P(1,0)}{\partial z}-\frac{\lambda}{\mu_1 N}P(0)B_1(s)\right]ds,\\
&P(2,z)=\int_0^z\left[\frac{\partial P(2,0)}{\partial z}-\frac{r\mu_1}{\mu_2}\frac{\partial P(1,0)}{\partial z}B_2(s)\right]ds.
\end{aligned}\tag{3}$$

В силу монотонности по $z$ и ограниченности функций $P(1,z)$ и $P(2,z)$ для них при $z\to\infty$ существуют пределы, которые обозначим $P(1)$ и $P(2)$. Очевидно $P(R)$ является стационарным распределением вероятностей значений случайного процесса $R(t)$. Следовательно, при $z\to\infty$ сходятся несобственные интегралы в (3), а необходимым условием сходимости несобственных интегралов является равенство нулю подынтегральной функции, когда переменная интегрирования стремится к бесконечности, поэтому из (3) можно получить следующие равенства:

$$\frac{\partial P(1,0)}{\partial z}=\frac{\lambda}{\mu_1 N}P(0),$$
$$\frac{\partial P(2,0)}{\partial z}=\frac{r\mu_1}{\mu_2}\frac{\partial P(1,0)}{\partial z},$$

подставляя которые в (3), получим

$$P(1,z)=\frac{\lambda}{\mu_1 N}P(0)\int_0^z\left[1-B_1(s)\right]ds=$$
$$=\frac{\lambda}{\mu_1 N}\int_0^z\left[1-B_1(x)\right]dx,$$
$$P(2,z)=\frac{r\mu_1}{\mu_2}\frac{\partial P(1,0)}{\partial z}\int_0^z\left[1-B_2(s)\right]ds= \quad (4)$$
$$=\frac{r\lambda}{\mu_2 N}P(0)\int_0^z\left[1-B_2(x)\right]dx.$$

При $z\to\infty$ из (4) можно записать

$$P(1)=\frac{\lambda}{\mu_1 N},\ P(2)=\frac{\lambda r}{\mu_2 N},$$
$$P(0)=1-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+\frac{\lambda r}{\mu_2}\right)\frac{1}{N}, \quad (5)$$

где вероятность $P(0)$ определена из условия нормировки.

Определим состояние СМО с $N$ источниками $N$-мерным вектором $\overline{R}=(R_1,R_2,\ ...,R_N)$, где $R_k$– состояние $k$-го источника.

В силу стохастической независимости функционирования источников распределение вероятностей $P(\overline{R})$ вектора $\overline{R}$ равно произведению распределений вероятностей $P(R_k)$ его компонент, т.е.

$$P(\overline{R})=\prod_{k=1}^{N}P(R_k), \quad (6)$$

где распределение определено векторами (5).

Для того чтобы найти распределение вероятностей $P(i,j)$ вектора $(i,j)$, достаточно просуммировать (6) по всем возможным векторам, среди компонент $R_k$ которых ровно $i$ компонент принимают значение 1, $j$ компонент принимают значение 2, а остальные $N-i-j$ компоненты принимают нулевое значение. Выполнив такое суммирование, получим

$$P_N(i,j)=\frac{N!}{i!\,j!(N-i-j)!}P^i(1)P^j(2)P^{N-i-j}(0), \quad (7)$$

где $P(R_k)$ определены равенством (5).

### 3. Исследование числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде

Для того чтобы решить исходную задачу исследования бесконечнолинейной двухфазной немарковской системы массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком, устремим $N$ к бесконечности в модели с конечным числом $N$ источников, рассмотренную в предыдущем разделе данной работы.

При этом модель с конечным числом источников переходит в модель с пуассоновским входящим потоком. В самом деле суммарный поток заявок от $N$ источников представляет собой сумму независимых редких потоков, а по теореме Б.И. Григелиониса [3] предельный, при $N\to\infty$, поток будет пуассоновским. Найдем его интенсивность как сумму интенсивностей потоков от всех источников. Интенсивность поступления заявок от одного источника есть величина, обратная средней длине интервала между моментами поступления заявок на обслуживающий прибор. Обозначим среднюю длину этого интервала $T$ и найдем ее значение. Так как интервал складывается из времени генерирования заявки, его среднее значение равно $\frac{N}{\lambda}$ и времени обслуживания, которое с вероятностью $1-r$ составляет одну первую фазу средней продолжительности $\frac{1}{\mu_1}$, а с вероятностью $r$ – сумму продолжительностей обеих фаз, то

$$T=\frac{N}{\lambda}+(1-r)\frac{1}{\mu_1}+r\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right)=\frac{N\mu_1\mu_2+\lambda\mu_2+\lambda r\mu_1}{\lambda\mu_1\mu_2}.$$

Следовательно, интенсивность поступлений от одного источника составит

$$\frac{1}{T}=\frac{\lambda\mu_1\mu_2}{N\mu_1\mu_2+\lambda\mu_2+\lambda r\mu_1\lambda\mu_1\mu_2},$$

а суммарная интенсивность поступления заявок от $N$ источников равна

$$\frac{N}{T}=\frac{N\lambda\mu_1\mu_2}{N\mu_1\mu_2+\lambda\mu_2+\lambda r\mu_1\lambda\mu_1\mu_2}.$$

При $N\to\infty$ эта интенсивность, очевидно, равна величине $\lambda$, как и в исходной модели.

Чтобы найти распределение вероятностей $P(i,j)$ в исходной модели, выполним в (7) предельный переход при $N\to\infty$.

Из (7) можно записать

$$P_N(i,j)=\frac{N!}{i!\,j!(N-i-j)!}P^i(1)P^j(2)P^{N-i-j}(0)=$$
$$=\frac{1}{i!\,j!}P^{-(i+j)}(0)\frac{N!}{(N-i-j)!N^{i+j}}\times$$
$$\times(NP(1))^i(NP(2))^jP^N(0). \quad (8)$$

Рассмотрим предельное поведение каждого сомножителя в (8) при $N\to\infty$, используя полученные равенства (5):

1. $P^{-(i+j)}(0)=\left(1-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+\frac{\lambda r}{\mu_2}\right)\frac{1}{N}\right)^{-(i+j)}\to 1.$

2. $\frac{N!}{(N-i-j)!N^{i+j}}=$

$$=\frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N}\cdot\ldots\cdot\frac{N-i-j+1}{N}\to 1.$$

3. $(NP(1))^i=\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^i.$

4. $(NP(2))^i=\left(\frac{\lambda r}{\mu_2}\right)^j.$

5. $P^N(0)=\left(1-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+\frac{\lambda r}{\mu_2}\right)\frac{1}{N}\right)^N\to e^{-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+\frac{\lambda r}{\mu_2}\right)}.$

Переходя к пределу при $N\to\infty$ в равенстве (8) и подставляя полученные предельные значения всех сомножителей, для предельного значения $P(i,j)$ получим

$$P(i,j)=\frac{1}{i!j!}\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^i\left(\frac{\lambda r}{\mu_2}\right)^j e^{-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+\frac{\lambda r}{\mu_2}\right)}=$$

$$=\left\{\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^i\frac{1}{i!}e^{-\frac{\lambda}{\mu_1}}\right\}\left\{\left(\frac{\lambda r}{\mu_2}\right)^j\frac{1}{j!}e^{-\frac{\lambda r}{\mu_2}}\right\}. \tag{9}$$

Из вида (9) распределения вероятностей $P(i,j)$ числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, можно сделать следующие выводы:

1. В каждый момент времени число застрахованных на первой и второй фазах стохастически независимы.

2. Число застрахованных лиц на каждой фазе в стационарном режиме имеет распределение Пуассона с параметром $\frac{\lambda}{\mu_1}$ – для первой и $\frac{\lambda r}{\mu_2}$ – для второй фазы.

Распределение вероятностей $P(i,j)$ числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, не зависит от вида функций распределения $B_1(x)$ и $B_2(x)$ продолжительностей фаз, а определяется лишь их средними значениями $\frac{1}{\mu_1}$ и $\frac{1}{\mu_2}$.

## Заключение

Таким образом, в работе математическая модель числа лиц, застрахованных в Пенсионном фонде, в виде немарковской бесконечнолинейной двухфазной системы массового обслуживания.

Разработан метод исследования такой СМО, который позволил найти явное выражение (9) для распределения вероятностей двухмерного вектора, первая компонента которого определяет число застрахованных лиц допенсионного возраста, а вторая – пенсионного.

Показано, что это распределение факторизуется, а каждый сомножитель имеет вид пуассоновского распределения, не зависящего от вида функций распределения продолжительностей фаз, определяемых лишь их средними значениями.

Полученные распределения можно использовать при составлении и анализе бюджета Пенсионного фонда.

## Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., 1987.
2. Назаров А.А. Формулы Энгсета для неоднородных немарковских систем массового обслуживания и их применение в сетях связи // Проблемы передачи информации. 1998. № 2.
3. Кёнинг Д., Штойян Д. Методы теории массового обслуживания. М.,1981.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.,1988.