3. Имеются также логико-познавательные задачи, выходящие за рамки собственно предметных. Это, во-первых, изучение собственно логического аппарата. Во-вторых, это фиксация «в общем виде» тех законов логики, которые наиболее распространены и востребованы как в рамках данной предметной области (в нашем случае образовательной области «Математика»), так и в других предметных областях. Такого рода задачи решаются на уровне формализации (доказательство законов логики, вывод правила приведения контрпримера и т.п.). При этом происходит выход из собственно предметной области. Полученные таким образом логические законы, правила и приемы, как сказано выше, оказываются применимыми в разных областях деятельности. Таким образом, средствами образовательной области «Математика» происходит формирование общелогических умений учащихся и тем самым полнее и эффективнее реализуется общекультурный потенциал этого учебного предмета.

## Литература

1. Никольская И.Л. О единой линии воспитания логической грамотности при обучении математике // Преемственность в обучении математике. М., 1978.
2. Столяр А.А. Логические проблемы преподавания математики. Минск, 1965.
3. Брейтигам Э.К. Деятельностно-смысловой подход в контексте развивающего обучения старшеклассников началам математического анализа: Моногр. Барнаул, 2004.
4. Зорина Л.Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников. М., 1978.
5. Формирование системного мышления в обучении: Учеб. пос. для вузов / Под ред. З.А. Решетовой. М., 2002.
6. Дорофеев Г.В. Математика для каждого. М., 1999.
7. Алгебра: Учеб. для 8 кл. общеобразов. учреждений / Под ред. С.А. Теляковского. М., 1996.
8. Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. средн. школы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. М., 1994.
9. Миракова Т.Н. Гуманитаризация школьного математического образования (методология, теория и практика): Моногр. / Под ред. Г.В. Дорофеева. М., 2000.
10. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 кл. средн. школы / Под ред. А.Н. Колмогорова. М., 1990.
11. Дорофеев Г.В. О некоторых вопросах, связанных с формальным определением комплексных чисел // Углубленное изучение алгебры и анализа: Пос. для учителей. М., 1977.
12. Пайсон Б.Д. О методических критериях выбора уровня строгости при изучении математических понятий // Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки будущих учителей: Межвуз. сб. науч. тр. Барнаул, 1992.
13. Пайсон Б.Д. О логической составляющей образовательной области «Математика» // Математика в школе. 2003. № 2.

***Ю.Б. Мельников***

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ЧЕРТЕЖ КАК ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Уральский государственный педагогический университет, г. Екатеринбург

Теория моделирования является одним из приоритетных направлений современной науки. Обычно в основе определения понятия «модель» лежит требование соответствия моделирующего объекта моделируемому. В математической логике [1, 2] модель понимается как результат конкретизации теории (таковы, например, модели теорий первого порядка). В прикладных (по отношению к математике) науках господствует противоположный подход: модель обычно понимается как результат абстрагирования от конкретных особенностей моделируемого объекта.

Мы предлагаем иной – формально-конструктивный – подход к определению понятия «модель». А именно под моделью понимается любой «объект», состоящий из двух компонент, называемых **интерфейсной** и **модельно-содержательной** компонентами. Структура интерфейсной компоненты в общем случае не уточняется, фиксируется лишь ее предназначение: обеспечение двусторонней связи между моделируемым и моделирующим объектами (интерфейсная компонента может быть представлена описанием переменных, алгебраических выражений, других обозначений и т.п.). Модельно-содержательная компонента состоит из следующих трех компонент: а) **носитель** – множество объектов, из которых состоит моделируемый объект с точки зрения проводимого исследования; б) **система характеристик** – система функций (однозначных отображений), область определения которых включается в носитель модели (функции с числовыми значениями называются **величинами**); в) **система отношений** на носителе и множестве характеристик, которые обычно задаются предикатами. С этой точки зрения, например, неправомерно говорить: «уравнение… является моделью (такого-то объекта)». Нам представляется, что в таком случае уравнение *представляет одно из отношений* в модельно-содержательной компоненте модели. Обычно, говоря о моделировании, рассматривают только связку «объект-модель». В работе [3] показано, что даже решение задач школьного курса математики нередко сопровождается многократным переходом от одной модели к другой. В частности, решение геометрических задач «на вычисление» можно представить в виде такого многократного перехода: сначала строится геометрический чертеж, потом по чертежу строится геометрическая модель, по ней – аналитическая модель. В некоторых случаях в процессе решения задачи в дальнейшем осуществляется переход от одной аналитической модели к другой (например, при отыскании экстремальных значений).

В данной работе мы рассмотрим процесс построения геометрической модели объекта, представленного текстом геометрической задачи с готовым чертежом. Геометрический чертеж, не являясь моделью, можно рассматривать как основу для геометрической модели задачи. Интерфейсная компонента геометрической модели представлена описанием способов изображения точек, отрезков, углов, параллельности прямых, способов измерения углов, длин отрезков, нахождения площади и других геометрических объектов, характеристик и отношений. Модельно-содержательную компоненту геометрической модели опишем с помощью следующей таблицы:

*Модельно-содержательная компонента геометрической модели (в рамках школьного курса математики)*

| **Носитель** | **Система характеристик** | **Система отношений** |
|---|---|---|
| Точки; части прямых (отрезки, лучи, прямые); дуги окружностей; углы; части круга (сегмент, сектор); многоугольники | Длина, величина угла, площадь, объем, отношение одноименных величин (например коэффициент подобия) | Равнобедренность и прямоугольность треугольника, параллельность и перпендикулярность прямых, подобие, равенство треугольников и др. |

В школьном курсе геометрии практически не возникает необходимости во введении новых величин, отличных от рассмотренных в этой таблице. Таким образом, учащиеся в процессе изучения геометрии должны научиться по тексту задачи и имеющемуся чертежу формировать носитель геометрической модели и систему отношений. В ходе создания такой модели происходит постепенное обогащение модели новыми элементами и отношениями. Обогащение мы здесь рассматриваем как одну из «операций» «алгебры моделей», введенных в [3] и [4]. Помимо обогащения моделей в этих работах рассматриваются такие «операции», как композиция, развертывание, сворачивание, редуцирование, конкретизация, обобщение, реконструкция и агрегатирование моделей.

Мы выделяем 2 типа обогащения моделей: внешнее и внутреннее. *Внешнее обогащение* модели состоит во введении новых элементов в носитель, систему характеристик и/или отношений, которые нельзя было «сконструировать средствами исходной модели». Например, допустим, что носитель геометрической модели (рис. 1, *а*), состоял из отрезков $AB$, $BC$, $AC$ и треугольника $ABC$. Проведем в треугольнике $ABC$ высоту $CH$ (рис. 1, *б*). Включение этого отрезка в носитель модели является ее внешним обогащением. Анализируя данный рисунок, мы обнаруживаем появление, например, треугольников $ACH$ и $BCH$. Включение этих треугольников в носитель модели является внутренним обогащением носителя, поскольку эти треугольники «сконструированы» из отрезков, уже присутствующих в носителе модели (мы в данный момент рассматриваем треугольник как систему из трех отрезков). Внутренним обогащением системы отношений является, например, равенство $AH^2 + CH^2 = AC^2$.

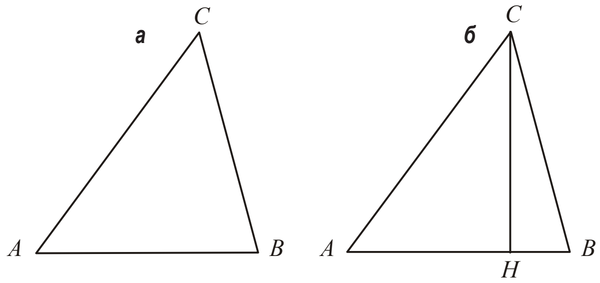


Рис. 1

Рассмотренный подход позволил нам выделить в работах [3, 5, 6] список «хороших треугольников», существенно уточняющий и дополняющий понятие «ключевого треугольника» [7], а также набор рекомендуемых дополнительных построений, приведенный ниже. Каждое такое дополнительное построение рассматривается нами как внешнее обогащение модели, что несколько отличается от подхода, примененного Э. Капленко [8]. Список «хороших треугольников» формировался исходя из требования возможности вычисления величины угла и длины стороны. Этот список содержит следующие 6 типов: равнобедренные и прямоугольные треугольники, треугольники, в которых известно (или «как бы известно», т.е. величина обозначена буквой) все нужное, а также пары равных треугольников, подобных треугольников или треугольников, имеющих общий элемент или равные элементы (стороны, углы). Анализ чертежа приводит к выделению новых треугольников и других фигур и систем фигур, новых отношений, что следует интерпретировать как внутреннее обогащение модели. Обучение выделению наиболее важных элементов можно осуществлять с помощью приема, называемого нами «цветное зрение»: а) отрезки и углы, величины которых нетрудно найти из условия с помощью метода восходящего анализа, мы считаем «зелеными»; б) отрезки и углы, величины которых требуется найти, мы считаем «красными».

Обучение решению геометрических задач «на вычисление» в сочетании с обучением моделированию проходит в несколько этапов. На первом этапе после изучения нового теоретического результата с помощью системы упражнений осуществляется формирование умения строить геометрическую модель по имеющемуся чертежу, т.е. выделять в чертеже основные элементы, необходимые для решения задачи: отрезки, углы, треугольники, параллелограммы и др. На втором этапе учащиеся обучаются выполнять внутреннее обогащение модели за счет выделения новых элементов и обнаружения новых отношений. Ситуация, когда внутреннее обогащение осуществляется за счет введения новых величин, практически не встречается. На третьем этапе учащиеся обучаются осуществлять внешнее обогащение модели путем проведения дополнительных построений. В настоящий момент мы рассматриваем только обучение проведению таких построений, как прямые и их части (лучи, отрезки), а также окружности. На каждом из этих этапов учащиеся формируют умение преобразовывать геометрическую модель в модель с системой отношений, представленной в виде равенств и неравенств.

Правила формирования, обогащения и анализа геометрической модели [3, 5] мы разбили на 2 группы: правила, обязательные для исполнения, и правила-рекомендации.

***Мы выделили следующие правила, обязательные для исполнения***:

1. *Если речь идет о расстоянии*, надо провести соответствующие отрезки (для того, чтобы данное *число* можно было рассматривать как *значение величины*[1]).

2. *Если речь идет о величине угла*, надо провести лучи, образующие данный угол.

3. «*Отрезок или угол бесполезен без треугольника*», т.е. а) отрезок должен быть стороной какого-то треугольника, б) угол должен быть одним из углов треугольника (данная формулировка носит нарочито эмоциональный, полемически заостренный характер и не должна пониматься буквально).

4. «*Цветное зрение*»: в чертеже выделяем а) «зеленые» отрезки и углы (их величину мы находим методом восходящего анализа); б) «красные» отрезки и углы (их величину требуется найти для ответа на требование задачи); в) отрезки и углы, параллельные и перпендикулярные «цветным» отрезкам. Здесь под «цветным» отрезком понимается не только «красный» или «зеленый» отрезок, но и отрезок, длина которого находится с использованием величин «цветных» отрезов и углов. Например, «цветной» является гипотенуза прямоугольного треугольника, один катет которого является «зеленым», а другой – «красным»).

***Список правил-рекомендаций имеет следующий вид***:

1. «*Параллельно-перпендикулярный взгляд на мир*»: особенно перспективным является проведение прямых, параллельных или перпендикулярных имеющимся отрезкам, особенно «цветным» отрезкам.

2. *В треугольниках*: а) в равнобедренном треугольнике желательно провести ту высоту, которая является медианой и биссектрисой; б) если середина стороны является точкой пересечения линий и т.п., то рекомендуется провести средние линии треугольника.

3. *Построение окружности* рекомендуется при выявлении в чертеже следующих конфигураций: а) пары прямоугольных треугольников с общей гипотенузой (провести общую для этих треугольников описанную окружность); б) три отрезка равной длины, у каждого из которых один конец находится в данной точке.

4. *Построения в окружности и анализ*: а) если точка окружности является точкой пересечения и др., то рекомендуется провести радиус в эту точку; б) особое внимание следует уделять вписанным и центральным углам, опирающимся на одну дугу, особенно на дугу, стянутую диаметром.

**Пример 1.** *Внутри угла в 60° расположена точка, отстоящая на расстоянии $\sqrt{7}$ и $2\sqrt{7}$ от сторон угла. Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.*

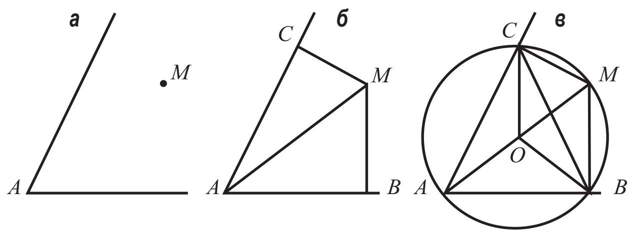


Рис. 2

Чертеж (рис. 2, *а*), построенный непосредственно по тексту задачи, не позволяет ответить на ее требование. Сначала рассмотрим решение, основанное на быстрейшем переходе к аналитической модели за счет минимально необходимого обогащения исходной геометрической модели. Для того чтобы информацию о расстоянии от точки *M* до сторон угла можно было бы интерпретировать как значения величин, проведем из этой точки перпендикуляры к сторонам угла и проведем отрезок в вершину угла (в соответствии с приведенными рекомендациями). Полученный чертеж (рис. 2, *б*) по-

[1] Напомним, что под **величиной** мы понимаем функцию, определенную на носителе модели, принимающую числовые (в некоторых приложениях – векторные) значения.

зволяет построить геометрическую модель, которая может быть преобразована в аналитическую модель. Для этого выделяем в чертеже треугольники *AMB* и *AMC* и углы *BAM* и *CAM*. Переход к аналитической модели начнем с построения интерфейсной компоненты, включив в нее описания «$\alpha$ – величина угла *BAM*», «длина отрезка *AM* равна *d*». Носитель аналитической модели является стандартным [3]: предметные переменные и константы (например числа), символы операций, выражения (допускающие отдельную интерпретацию в рамках модели), предикатные символы, скобки и др. Система характеристик состоит из операций (в носителе содержатся их обозначения), преобразований выражений и формул (тождественные преобразования, равносильные преобразования уравнений и др.). Систему отношений в рассматриваемой ситуации можно представить в виде системы равенств

$$\begin{cases} d\sin\alpha = \sqrt{7}, \\ d\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sqrt{7}. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим другое решение, основанное на таком обогащении геометрической модели, которое позволяет несколько упростить аналитическую модель и облегчить процесс анализа аналитической модели. А именно выполним построения из приведенного выше набора рекомендованных дополнительных построений (рис. 2, *б*) [3, 5]. На этом чертеже выделяем два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, и в соответствии с указанными рекомендациями проводим общую для них описанную окружность, а также радиусы *OB*, *OC*. Внутреннее обогащение модели приводит к утверждению, что величина угла *BMC* равна 120° (рассуждения мы опустим). «Цветное зрение» позволяет выделить важную конфигурацию из «зеленых» отрезков *BM*, *CM* и «зеленого» угла *BMC*, что в соответствии с правилом «отрезок или угол бесполезен без треугольника» приводит к построению отрезка *BC* (рис. 2, *в*). «Красный» отрезок *AM* является диаметром окружности, описанной около треугольника *BMC*. Обилие «зеленых» отрезков и углов в этом треугольнике позволяет нам вычислить искомую длину диаметра.

Рассмотренный материал позволяет сделать вывод о принципиальной возможности обучения моделированию при изучении собственно математического содержания. При этом строятся математические модели математических объектов. Этот подход во многом реализуется, например, в пособии [9].

## Литература


1. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. М., 1987.
2. Кейслер Г., Чен Ч.Ч. Теория моделей. М., 1977.
3. Мельников Ю.Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Моногр. Екатеринбург, 2004.
4. Мельников Б.Н., Мельников Ю.Б. Геотехногенные структуры: теория и практика. Екатеринбург, 2004.
5. Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б. Геометрия – это несложно: Учеб. пос. по курсу «Математика». Екатеринбург, 2001.
6. Мельников Ю.Б. О преподавании геометрии в условиях дефицита времени // Мат-лы II Всерос. геометр. семин. «Проблемы геометрического образования на современном этапе». г. Псков, 18–19 мая 2001 г. Псков, 2001.
7. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7–9 кл.: Учеб. для общеобразов. учеб. заведений. М., 1999.
8. Капленко Э. Новый метод решения планиметрических задач // 1 сентября. 2001. № 39.– http://archive.1september.ru/mat/2001/39/no39 01.htm
9. Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б. Лекции по алгебре. Учеб. пос. по курсу «Математика». 3-е изд., испр. и доп. Екатеринбург, 2003.


***Ю.Б. Мельников*, Ю.Ю. Мельникова**, Н.В. Мельникова******

# ОБ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

* Уральский государственный педагогический университет

** Уральский государственный университет

*** Уральский государственный технический университет, г. Екатеринбург

Традиционно в основу определения понятия «модель» закладываются различные трактовки «похожести» моделирующего объекта на моделируемый объект. В работах [1, 2] предложен иной подход, который мы называем формально-конструктивным, состоящий в том, что под **моделью** понимается