зволяет построить геометрическую модель, которая может быть преобразована в аналитическую модель. Для этого выделяем в чертеже треугольники *AMB* и *AMC* и углы *BAM* и *CAM*. Переход к аналитической модели начнем с построения интерфейсной компоненты, включив в нее описания «α – величина угла *BAM*», «длина отрезка *AM* равна *d*». Носитель аналитической модели является стандартным [3]: предметные переменные и константы (например числа), символы операций, выражения (допускающие отдельную интерпретацию в рамках модели), предикатные символы, скобки и др. Система характеристик состоит из операций (в носителе содержатся их обозначения), преобразований выражений и формул (тождественные преобразования, равносильные преобразования уравнений и др.). Систему отношений в рассматриваемой ситуации можно представить в виде системы равенств

$$\begin{cases} d\sin\alpha = \sqrt{7}, \\ d\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sqrt{7}. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим другое решение, основанное на таком обогащении геометрической модели, которое позволяет несколько упростить аналитическую модель и облегчить процесс анализа аналитической модели. А именно выполним построения из приведенного выше набора рекомендованных дополнительных построений (рис. 2, *б*) [3, 5]. На этом чертеже выделяем два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой, и в соответствии с указанными рекомендациями проводим общую для них описанную окружность, а также радиусы *OB*, *OC*. Внутреннее обогащение модели приводит к утверждению, что величина угла *BMC* равна 120° (рассуждения мы опустим). «Цветное зрение» позволяет выделить важную конфигурацию из «зеленых» отрезков *BM*, *CM* и «зеленого» угла *BMC*, что в соответствии с правилом «отрезок или угол бесполезен без треугольника» приводит к построению отрезка *BC* (рис. 2, *в*). «Красный» отрезок *AM* является диаметром окружности, описанной около треугольника *BMC*. Обилие «зеленых» отрезков и углов в этом треугольнике позволяет нам вычислить искомую длину диаметра.

Рассмотренный материал позволяет сделать вывод о принципиальной возможности обучения моделированию при изучении собственно математического содержания. При этом строятся математические модели математических объектов. Этот подход во многом реализуется, например, в пособии [9].

Литература

1. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. М., 1987.
2. Кейслер Г., Чен Ч.Ч. Теория моделей. М., 1977.
3. Мельников Ю.Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Моногр. Екатеринбург, 2004.
4. Мельников Б.Н., Мельников Ю.Б. Геотехногенные структуры: теория и практика. Екатеринбург, 2004.
5. Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б. Геометрия – это несложно: Учеб. пос. по курсу «Математика». Екатеринбург, 2001.
6. Мельников Ю.Б. О преподавании геометрии в условиях дефицита времени // Мат-лы II Всерос. геометр. семин. «Проблемы геометрического образования на современном этапе». г. Псков, 18–19 мая 2001 г. Псков, 2001.
7. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7–9 кл.: Учеб. для общеобразов. учеб. заведений. М., 1999.
8. Капленко Э. Новый метод решения планиметрических задач // 1 сентября. 2001. № 39.– http://archive.1september.ru/mat/2001/39/no39 01.htm
9. Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б. Лекции по алгебре. Учеб. пос. по курсу «Математика». 3-е изд., испр. и доп. Екатеринбург, 2003.

Ю.Б. Мельников*, Ю.Ю. Мельникова**, Н.В. Мельникова***

ОБ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

* Уральский государственный педагогический университет

** Уральский государственный университет

*** Уральский государственный технический университет, г. Екатеринбург

Традиционно в основу определения понятия «модель» закладываются различные трактовки «похожести» моделирующего объекта на моделируемый объект. В работах [1, 2] предложен иной подход, который мы называем формально-конструктивным, состоящий в том, что под **моделью** понимается объект, имеющий структуру, описанную в следующей таблице.

Интерфейсная компонента модели	Модельно-содержательная компонента модели		
	Носитель модели	Система характеристик	Система отношений
Система связей между моделируемым объектом и компонентами моделирующего объекта	Множество элементов, из которых состоит объект в рамках данной модели	Множество функций, определенных на носителе модели. Характеристика с числовым значением называется величиной (скалярной)	Множество отношений на носителе и множестве характеристик

Это определение основано на определении модели теории первого порядка [3].

Например, в школьном курсе математики моделью функции является формула вида $\varphi(t) = \Phi(t)$, где φ – идентификатор функции, t – аргумент функции, $\Phi(t)$ – некоторое алгебраическое выражение, т.е. выражение, содержащее обозначения операций «+», «–»,«·», «:», а также обозначения основных элементарных функций: степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Интерфейсная компонента представлена описанием операций и элементарных функций, а также описанием предиката (отношения) равенства. Носитель этой модели представляет собой фрагменты текста, во-первых, допускающие интерпретацию вне рамок этого текста и, во-вторых, имеющие хотя бы одну из интерпретаций, совпадающую с интерпретацией этого фрагмента в рассматриваемом тексте. Например, для выражения $2\sin x + 1$ носитель модели состоит из слов 2, x, sin, $\sin x$, 1, +, $2\sin x$, $2\sin x + 1$. Слово $x + 1$ не входит в носитель, хотя оно является фрагментом исходного выражения и допускает интерпретацию вне рамок исходного выражения. Однако эта интерпретация не совпадает с интерпретацией в исходном выражении, так как операции вычисления значения синуса и умножения является более приоритетными, чем операция «сложение», поэтому 1 будет складываться только с $2\sin x$. Возможно, что фрагмент текста допускает несколько интерпретаций, но в тексте допускается только одна из них, как это происходит, например, с омонимами: слово «ключ» имеет несколько интерпретаций, но в предложении «ключ застрял в замочной скважине» используется только одна из них. Такая же ситуация возникает с идиоматическими оборотами. Система характеристик включает в себя тождественные преобразования алгебраических выражений, в частности преобразования выражений, описанные правилами вычисления числовых значений функций (в том числе алгебраических операций). В частности, формулы сокращенного умножения определяют тождественные преобразования выражений. Эти преобразования можно рассматривать как способ задания некоторых функций, определенных на множестве выражений, значениями которых также являются выражения. Тождество $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ определяет функцию P – такую, что, например, $P\left(t^4 - t^2\right) = \left(t^2 - t\right)\left(t^2 + t\right)$, $P\left(1-\alpha^6\right) = \left(1-\alpha^3\right)\left(1+\alpha^3\right)$. На носителе данной модели определяются отношения, обычно задаваемые равенствами или неравенствами, например $5>3$, $x^2 \geq 0$. Тот факт, что обычно в школьном курсе математики не акцентируется различие между равенством, уравнением и тождеством, иногда приводит к искаженному представлению о некоторых отношениях.

Такое толкование термина «модель» имеет следующие преимущества: а) наличие четкого критерия того, что данный объект является моделью; б) универсальность; в) корректное определение различных оценок уровня «похожести» моделирующего и моделируемого объектов; г) возможность алгебраического подхода к построению новых моделей. А именно, удалось достаточно корректно определить систему преобразований моделей: обогащение и редуцирование моделей, композицию, развертывание и свертывание, конкретизацию и обобщение, реконструкцию, агрегатирование, представление одной модели в другой. Применяя эти преобразования в качестве алгебраических операций, можно получать широкий спектр моделей, используя в качестве основы небольшое число базовых моделей.

С точки зрения моделирования, целью эксперимента является получение значений некоторых характеристик (числовых и нечисловых) и экспериментальное выявление отношений между элементами носителя и характеристиками. С точки зрения теории моделирования [1, 2], особенность педагогических измерений, по сравнению с измерениями в физике, химии, экономике и др., состоит в том, что, во-первых, определение характеристики нередко оказывается менее строгим (корректным), а получающиеся значения характеристик – менее достоверными. Некорректность связана не только с нечеткостью формулировки, но и с нечеткостью выделения элементов носителя, в большей степени характерной для психолого-педагогических исследований. Например, даже при наличии четких критериев отметки возникают спорные ситуации, для разрешения которых приходится прибегать к экспертным оценкам.

В педагогических измерениях особенно остро стоит вопрос о том, что именно измеряется с помощью данной методики контроля? Измерение проводится в рамках некоторой модели, но интерпретация нередко проводится в рамках другой модели. Например [4, 5], в настоящий момент на вступительных испытаниях в вуз по количеству решенных задач и качеству оформления работы делают вывод о способности абитуриента обучаться в данном вузе по данной специальности и в дальнейшем работать в соответствии с полученным образованием. Но на самом деле подобное испытание позволяет измерить уровень актуальной обученности и, быть может, уровень усвоения учебного материала по В.П. Беспалько [6] (уровень узнавания, алгоритмической деятельности, эвристической деятельности, творческой деятельности). При этом сложно даже сделать вывод об уровне сформированности умения решать задачи: задача, эвристическая для одного абитуриента, является стандартной для другого, допустим, обучавшегося по специальной программе. Это является одной из причин того, что нередко студенты не подтверждают в процессе изучения высшей математики высоких показателей, продемонстрированных на вступительных испытаниях.

Таким образом, вопрос об адекватности модели является чрезвычайно актуальным в теории моделирования. Можно предложить несколько трактовок понятия адекватности [1, 2]. Систему характеристик «адекватность» можно представить в виде комбинации двух систем характеристик, называемых корректностью и достоверностью. **Корректность** описывает соответствие модели некоторым формальным, грамматическим правилам. Примером некорректности является часто применяемое представление решения квадратного уравнения $x^2-3x+2=0$ в виде x_1=1, x_2=2. Во-первых, не указано явно, какая именно логическая связка соединяет предикаты x_1=1 и x_2=2. Во-вторых, требуется найти значение переменной x, а записаны значения переменных x_1 и x_2. Нередко встречаются некорректные описания переменных и т.д. **Достоверность** – это система характеристик, каждая из которых сопоставляет модели $\mathcal{A}$ уровень «похожести» моделируемого объекта на моделирующий объект. Примером такой характеристики является относительная погрешность вычисленного значения величины относительно значения этой величины, полученного непосредственным измерением.

Рассмотрим еще несколько систем характеристик, входящих в систему характеристик «адекватность».

Доступностью модели мы будем называть систему характеристик, отражающую способность общества, соответствующих профессиональных групп и государственных институтов к восприятию данной модели, способности интерпретировать результаты ее анализа. Эти характеристики имеют и субъективный и объективный характер, например: уровень распространенности языка модели, его наглядность (субъективные характеристики); уровень сложности языка (объективная характеристика). В школьном курсе математики изучение теории чисел теоретически можно основывать на теории множеств, понятиях ординала и кардинала. Однако *доступность* этих моделей числа для учащихся младших классов недостаточна.

Эффективностью модели называется система характеристик, отражающая сравнение результатов исследования объекта с помощью различных моделей. Эффективность модели может включать в себя качественные и количественные характеристики (последние называются величинами). Примерами характеристик эффективности являются: стоимость исследования (планируемая стоимость, реальная стоимость, стоимость необходимого оборудования и др.); время анализа модели, в том числе время получения значения характеристики; трудоемкость анализа модели. При оценке эффективности осуществляется сравнение данных характеристик для различных моделей. Например, можно сравнивать эффективность различных моделей процесса обучения, причем сравнение может проводиться по различным характеристикам. Так, обучение математике с помощью компьютера требует значительных капиталовложений, поэтому сначала стоимость обучения окажется выше, чем при традиционных методах. С другой стороны, использование компьютера может повысить интенсивность обучения, в этом смысле эффективность обучения окажется выше.

Кратностью интерпретации мы будем называть количество существенно различных способов выделения элемента носителя, нахождения значения характеристики, определения наличия или отсутствия данного отношения между элементами. В частности, в геометрии площадь многоугольника можно вычислить, разбивая его на другие фигуры, например треугольники, и суммируя их площади. Если мы расширяем геометрическую модель, включая в нее такие характеристики, как масса плоской фигуры, удельная плотность, то можно предложить существенно иной вариант вычисления площади: сравнением массы многоугольника, вырезанного из однородного листа бумаги, с массой фигуры известной площади, вырезанной из такого же листа. Расхождение в полученных значениях является одной из характеристик *достоверности* модели.

Устойчивость модели к изменениям характеризует изменение адекватности модели, в сравнении с исходной, при условии, что новая модель отличается от исходной модели незначительно. Примером одной из характеристик, относящихся к устойчивости к изменениям, является определение устойчивости по Ляпунову решения дифференциального уравнения, т.е. устойчивости относительно изменений начальных условий. Другим примером характеристики, относящейся к устойчивости модели к изменениям, является обусловленность системы линейных алгебраических уравнений. Некоторые модели формирования умения решения задач оказываются неустойчивыми по отношению к контингенту обучаемых. Хорошо известно, что задача, носящая эвристический характер для одних учащихся, для учащихся с другой подготовкой могут быть стандартными или даже репродуктивными. Устойчивость модели обучения может зависеть от частного когнитивного стиля, предпочтительного для конкретного учащегося, именно поэтому так важно формирование персонального познавательного стиля как результата интеграции разных уровней стилевого поведения [7, с. 319–324], чему уделяется особе внимание в проекте «Математика. Психология. Интеллект».

Представимость в модели характеризует возможность интерпретации в данной модели некоторых компонент иной модели объекта (отличной от данной): некоторого отношения (свойства), характеристики, элемента носителя и др. Крайний случай представимости – это представление одной модели в другой [2]. Примером непредставимости является задание-шутка «Признаться в любви на языке Basic без использования операторов комментирования и вывода текста типа REM, PRINT». Невозможно средствами балета изложить теорему Пифагора. Пример представимости: если линии L и M заданы уравнениями $\varphi(x;y)=0$ и $\psi(x;y)=0$, то в рамках «координатной модели» (в рамках аналитической геометрии) утверждение о том, что линии пересекаются, интерпретируется (выражается) как утверждение о совместности (разрешимости) системы уравнений

$$\begin{cases}\varphi(x;y)=0,\\ \psi(x;y)=0.\end{cases}$$

Матричное представление линейного оператора в конечномерном пространстве можно рассматривать как модель оператора в матричной алгебре. При этом утверждение о вырожденности линейного оператора $\widehat{A}:U\to V$ в этой модели *представимо* в виде неравенства $Rang(\widehat{A})<\dim(U)$. Средства контроля, ориентированного на оценивание знаний, умений и навыков, при надлежащей организации могут использоваться и для анализа сформированности, например, некоторых исследовательских умений, и для целей обучения. Таким образом, в модели контроля, учитывающей только средства контроля, могут быть представлены некоторые модели обучения.

Анализ показывает, что некоторые широко распространенные теории представляют собой систему из нескольких моделей. Например, в дипломной работе студентки математического факультета Уральского педагогического университета Е.В. Немолодышевой, выполненной под руководством Ю.Б. Мельникова, одним из основных результатов является утверждение о том, что в векторной алгебре можно выделить три модели, названных авторами «геометрической моделью» векторной алгебры, «векторно-аналитической моделью» и «координатной моделью». Носителем геометрической модели является множество направленных отрезков, носителем векторно-аналитической модели – такие выражения, как $\vec{a}-2\vec{b}$ или $\left(\vec{a}-\vec{b};\vec{c}\right)=0$ и т.п., носителем координатной модели – выражения и формулы для обозначений координат векторов (например уравнение для координат вектора). В теории комплексных чисел [8] можно выделить четыре модели. Во-первых, комплексное число как упорядоченная пара действительных чисел. Во-вторых, комплексное число как многочлен первой степени от переменной i (в радиоэлектронике для этой цели используется переменная j), например многочлен $2–3i$ со специфическим умножением многочленов. В-третьих, комплексное число как матрица $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ с обычными операциями умножения и сложения матриц. В-четвертых, комплексное число как вектор комплексной плоскости (т.е. двумерного линейного пространства геометрических векторов со специфическим умножением векторов). Используя операции алгебры моделей [1, 2], можно сказать, что векторную алгебру можно представить как *композицию* трех моделей, а алгебру комплексных чисел – как *композицию* четырех моделей. Здесь термин «алгебра» используется в смысле «математическая теория» (в отличие от толкования алгебры в смысле «универсальной алгебры»). Количество различных изоморфных моделей, композицией которых является данная модель, мы назовем **изокомпозиционностью модели**. По мере развития науки изокомпозионность модели может увеличиваться. Мы относим эту характеристику к адекватности модели. На практике изоморфные модели, композицией которых является данная модель $\mathcal{A}$, отождествляются, что может отражаться, например, на корректности и достоверности модели $\mathcal{A}$.

Приведенный выше список систем характеристик не является полным. Этот список нуждается в пополнении, систематизации. Требуется построение модели (см. таблицу), носителем которой является совокупность характеристик, определенных на множестве моделей. Таким образом, следует уточнить набор характеристик, определить операции и отношения. По нашему мнению, на базе теории моделей можно построить систему моделей процесса обучения. Основанием для такой надежды является тот факт, что модели, формализованные согласно таблице, могут быть использованы для построения новых моделей с помощью ряда формальных процедур, описанных в [1, 2], в частности композиции, развертывания модели и др. Вместе с тем к настоящему моменту недостаточно проработано определение адекватности модели, являющейся результатом преобразований других моделей. Нашу работу следует рассматривать как шаг в этом направлении.

Литература

1. Мельников Ю.Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Моногр. Екатеринбург, 2004.

2. Мельников Б.Н., Мельников Ю.Б. Геотехногенные структуры: теория и практика: Моногр. Екатеринбург, 2004.
3. Кейслер Г., Чен Ч.Ч. Теория моделей. М., 1977.
4. Маргулян А.В., Мельников Ю.Б. Вступительные и выпускные испытания с точки зрения теории моделей // Качество педагогического образования. Сельский учитель: Тр. V Всерос. науч.-практ. конф. Т. 1. Орел, 2004.
5. Мельников Ю.Б., Мельникова Ю.Ю. Контроль как оценка адекватности модели обучения // Там же.
6. Беспалько Б.П. Слагаемые педагогической технологии. М., 1989.
7. Холодная М.А. Когнитивные стили. О природе индивидуального ума. 2-е изд. СПб., 2004.
8. Мельникова Н.В., Мельников Ю.Б. Лекции по алгебре: Учеб. пос. по курсу «Математика»: 3-е изд., испр. и доп. Екатеринбург, 2003.

Э.К. Брейтигам

ОРГАНИЗАЦИЯ ПОНИМАЮЩЕГО УСВОЕНИЯ СТАРШЕКЛАССНИКАМИ НАЧАЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Барнаульский государственный педагогический университет

Личностно ориентированная образовательная парадигма влечет за собой формирование новых теоретико-методологических принципов построения образовательных систем. Личностно ориентированное образование в преломлении к обучению означает переход от науконаучения к логике культуры. Ключевыми категориями культуры являются смыслы, знаково-символические средства, творчество, субъектный (личностный) опыт.

Важнейшими характеристиками, которые присутствуют практически у всех авторов различных моделей личностно ориентированного образовательного процесса, являются следующие:

– основным результатом обучения является обогащение концепции жизни, развитие личностного концептуального видения мира («образ мира», «картина мира»);

– акцент переносится с информационного на смысло-поисковое обучение;

– основное внимание сосредоточено на становлении личностно-смысловой сферы ученика, рефлексии различных видов деятельности и приобретенного опыта, что придает обучению развивающий характер;

– обучение опирается на имеющийся субъектный (личностный) опыт ребенка и направлено на преобразование этого опыта;

– в процессе обучения создаются условия для раскрытия индивидуальности ребенка, его самореализации и творчества;

– в технологии личностно ориентированного обучения существенную роль играют системное структурирование учебного материала, построение личностно ориентированных образовательных ситуаций, учебно-познавательные творческие задачи, овладение общими учебными действиями в процессе самостоятельной деятельности, диалог, рефлексия [1].

В свою очередь образовательная система должна выступать как своеобразный социокультурный инструмент становления и развития единства мотивационно-смысловой, предметно-деятельностной и интеллектуально-коммуникативной сфер личности [2]. Ключевыми категориями образовательных систем развивающего обучения старшеклассников в рамках личностно ориентированной образовательной модели, с нашей точки зрения, являются категории «*смысл*» и «*понимание*». Особая роль принадлежит этим категориям при обучении математике, что связано с особенностями математического знания: абстрактность математических понятий, широкое использование специальной знаковой системы, универсальность математического моделирования как метода исследования окружающего мира, использование законов логики и др.

Наш выбор ключевых категорий обусловлен тем, что развитие личности в обучении во многом определяется *пониманием* учебного материала; только в этом случае происходит обогащение личностного опыта учащегося, осознанное усвоение им учебного материала. Мы рассматриваем понимание как постижение *смысла* и значения объекта, явления, понятия, владение различными формами его представления, что связано не только с выделением содержательных взаимосвязей, но и с установлением их иерархии, значимости, включением в систему личностного опыта, в структуру более высокого порядка.

Категория «смысл», по мнению Д.А. Леонтьева, может претендовать на роль центрального понятия в новой психологии, так как данное понятие «находится на пересечении деятельности, сознания и личности, связывая между собой три фундаментальные психологические категории» [3, с. 300]. Д.А. Леонтьев считает, что «смысл предстает перед нами как связь между объективными жизненными отношениями