Н.Г. Маликова

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ УМЕНИЯ МОДЕЛИРОВАТЬ

Томский государственный педагогический университет

Одной из важнейших задач, стоящих перед школой, является задача интеллектуального развития учащихся. В связи с ее решением, наряду с формированием учебных умений, большое внимание уделяется общим интеллектуальным умениям. Одним из таких умений является умение осуществлять математическое моделирование.

Н.Я. Виленкин, говоря о математическом моделировании, отмечает, что следует значительно повысить уровень требований к умению строить математические модели различных явлений и исследовать эти модели. В частности, «надо усилить роль текстовых задач» [1, с. 13].

В связи с этим учитель должен способствовать формированию первоначальных представлений о процессе математического моделирования как способе познавательной деятельности.

Моделирование может выполнять несколько функций:

– служить средством обобщения наблюдаемых и изучаемых фактов и явлений в соответствующей области учебного материала;

– решать познавательные задачи исследования изучаемого понятия;

– дать возможность учащимся спланировать свою работу по изучению соответствующего понятия в его конкретных проявлениях и проконтролировать эту работу.

Нас интересует тот аспект проблемы моделирования, который позволяет рассматривать моделирование как способ организации познавательной деятельности.

Как показали исследования Д. Дьюи [2], В.А. Далингера [3], успешность деятельности моделирования во многом определяется степенью развития умения мыслить вероятностно, т.е. работать в парадигме: «Что будет, если?..», «Какие изменения произойдут, если?..».

В последние годы в школьном курсе математики процессу моделирования уделяется специальное внимание. В некоторых школьных учебниках данное понятие обсуждается специально, оно введено как предмет изучения (А.Г. Мордкович, Г.К. Муравин).

В проекте «МПИ» («Математика. Психология. Интеллект») формирование умения осуществлять математическое моделирование происходит с помощью специальных учебных заданий [4–11].

Данная система заданий включает в себя задания, которые создают условия для развития у обучающихся устойчивых представлений о процессе моделирования, учат детей реагировать на изменение данных в условии, видеть, как такие изменения влияют на полученную модель, определять полноту постановки условия задачи, составлять новые задачи и т.д.

В своих исследованиях В.А. Далингер говорит о том, что очень важно систему заданий рассматривать «как средство развития математической культуры учащихся». При этом он отмечает, что система заданий способна развивать все компоненты математической подготовки: знания и умения, установленные программой обучения; мыслительные операции и методы, присущие математической деятельности, в том числе и метод моделирования; математический стиль мышления; рациональные, продуктивные способы учебно-познавательной деятельности и т.д. [3, с. 110].

В частности, система заданий в МПИ-проекте включает задания, содержащие задания с параметрами.

В последние годы в школьной практике обучения математике наблюдается значительное повышение интереса к задачам с параметрами, так как они обладают высокой диагностической и прогностической ценностью. С их помощью можно проверить знания основных разделов школьной математики, владение определенным кругом методов и идей, уровень логического мышления, навыки исследовательской деятельности. Кроме этого, по мнению В.С. Былкова, задачи такого рода выполняют целый ряд важных дидактических и познавательных функций:

– формируют навыки математического моделирования;

– позволяют осуществлять неформальное изучение математических понятий, межпредметные связи;

– организуют тесное взаимодействие прикладной линии с другими содержательно-методическими линиями школьного курса математики;

– вырабатывают умения, связанные с анализом прикладных задач;

– помогают осознать сущность математического подхода к изучению реальных явлений [12, с. 14].

Особенностью текстовых задач, содержащих параметры, пишет Н.В. Толпенина, «является то, что параметр, будучи фиксированным, но неизвестным, имеет как бы двойную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет обращаться с параметром как с числом или известным данным, а во-вторых, степень свободы общения ограничивается его неизвестностью» [13, с. 10]. Поэтому в зависимости от того, какая роль отводится параметру при решении задач (параметр-число, параметр-переменная или параметр-слово или словосочетание), можно соответственно определиться с выбором решения определенной текстовой задачи.

Изучением задач с параметрами, их роли в обучении, понятий, связанных с их решением, в разные годы занимались М.И. Башмаков, Ю.М. Важенин, В.А. Далингер, Г.В. Дорофеев, Я.Л. Крейнин, А.Г. Мордкович, Г.И. Саранцев, Г.А. Ястребинецкий и др. При этом большинство авторов характеризуют эти задачи как исследовательские, требующие высокой логической культуры и техники исследования.

Наше исследование показало, что затруднения, связанные с решением текстовых задач с параметрами, исходят от сложившейся практики школьного математического образования. Чаще всего задачи с параметрами подаются учащимся в сформулированном виде, а ученик не понимает, откуда и как они рождаются.

Из сказанного можно сделать вывод, и он подтвержден экспериментально, что необходимы специальные учебные задания, которые учили бы «вероятностному» стилю мышления.

Остановимся на методических характеристиках некоторых из этих заданий. Сюда прежде всего относятся задания, которые мотивируют школьников к проведению обобщений проблемной (моделируемой) ситуации, к введению параметра.

Приведем два примера. Первый из них – работа с учащимися 7-го класса [6, с. 5–11], позволяющая им выйти на необходимость введения параметра, решения поставленной задачи в общем виде.

Предлагается задача. *Некто подошел к клетке, в которой сидели фазаны и кролики. Сначала он сосчитал головы, их оказалось 15. Потом он подсчитал лапки, их было 42. Сколько кроликов и сколько фазанов было в клетке?*

Обсуждаются различные способы решения (арифметический и алгебраический). Использование алгебраического метода приводит к модели: $4x+2(15-x)=42$.

Затем предлагается серия заданий, которая создает условия для обсуждения преимуществ алгебраического метода, понимания того, что является инвариантным в условии задачи:

«Как изменилось бы условие задачи, если бы в условии было дано 12 голов и 40 лап?

Сформулируйте задачу о фазанах и кроликах, для решения которой можно было бы использовать уравнение: $4x+2(7-x)=24$.

Допустим, мы насчитали в клетке 30 голов и 50 лап. Могло ли быть такое сочетание голов и лап в действительности? Могло ли оказаться 15 голов и 55 лап?

Если мы сами захотим составить такую задачу, то при любых ли значениях числа лап и голов она будет иметь смысл?» [6, с. 7].

Обсуждение последнего вопроса подводит учащихся к мысли о том, что полезно вместо задачи с конкретными числами решить задачу в общем виде, введя соответствующие обозначения (в частности параметр).

«Пусть a – число голов, b – число лап, x – число кроликов. Тогда получим:

$(a-x)$ – число фазанов;

$4x$ – число кроличьих лап;

$2(a-x)$ – число фазаньих лап;

$4x+2(a-x)$ – общее число лап фазанов и кроликов равно.

По условию задачи это число равно b.

Составляем уравнение:

$$4x+2(a-x)=b.$$

Таким образом, число кроликов равно $\frac{b}{2}-a$. Тогда число фазанов равно

$$a-x=a-\left(\frac{b}{2}-a\right)=a-\frac{b}{2}+a=2a-\frac{b}{2}.$$

Ответ: в клетке было $\frac{b}{2}-a$ кроликов и $2a-\frac{b}{2}$ фазанов» [6, с. 8].

Таким образом, рождается ***задача с параметрами***.

Очень полезно после получения ответа в параметрическом виде вернуться к задачам с числовыми данными и увидеть, как полученная математическая модель дает возможность решить целый класс однотипных задач.

Выясним теперь, как из этого общего решения получаются решения частных задач.

«Найдем числовые значения выражений $\frac{b}{2}-a$ и $2a-\frac{b}{2}$ для рассмотренных значений a и b.

Если $a = 15$, $b = 42$, то $\frac{b}{2}-a=\frac{42}{2}-15=6$,

$$2a-\frac{b}{2}=2\cdot 15-\frac{42}{2}=9.$$

Мы получили такой же ответ, как и раньше.

Если $a = 30$, $b = 50$, то $\frac{b}{2}-a=\frac{50}{2}-30=-5$.

Этот результат противоречит содержанию задачи. Не может же число кроликов быть отрицательным!

Если $a = 15$, $b = 55$, то $\frac{b}{2}-a=\frac{55}{2}-15=12{,}5$.

Получили, что в клетке прыгало двенадцать с половиной кроликов. Это тоже противоречит здравому смыслу» [6, с. 9].

Общее решение позволило ответить на поставленные вопрос, так как, меняя значения этих параметров, учащиеся получают различные текстовые задачи, имеющие общий сюжет и различающиеся между собой лишь значениями данных величин. Но оказалось, что не при любых значениях a и b задача имеет смысл.

Проводится исследование полученной модели, которое является необходимым этапом процесса моделирования [6, с. 10].

Методический прием, который использовался при построении данного задания, – включение вопросов, которые провоцировали учащихся на проведение обобщения, введение параметров.

Для того чтобы проверить, насколько школьники прочувствовали роль перехода к параметру в решении возникшей проблемы, полезно обсудить с ними высказывание Д. Пойа: «Если бы мы решали задачу с числовыми данными вместо буквенных, то поучительное исследование формулы, а также ценная проверка результата были бы упущены» [14, с. 11].

Подобная работа продолжается и в других классах.

Так, учащимся 9-го класса предлагается выполнить задание [8, с. 155–157].

Задание. «*Рассмотрите функции:*

а) $y = 2x^2 + x + 2$; б) $y = 3x^2 + x + 3$; в) $y = -x^2 + x - 1$.

Что общего в аналитическом задании всех этих функций? Проверьте, пересекают ли графики этих функций ось Ox?» [8, с. 154].

Во всех случаях графики данных функций не пересекают ось Ox. Создается впечатление, что каждый раз, когда будет дана функция вида $y = ax^2 + bx + a$, то ее график не пересечет ось Ox.

Это мнение учащиеся могут согласовать с результатами работы над следующими вопросами:

«Запишите еще несколько функций, которые задаются аналогично. Пересекают ли графики этих функций ось Ox?

Верно ли, что график любой функции вида $y = ax^2 + bx + a$ не пересекает оси Ox?» [8, с. 155].

Теперь возникает конфликт между тем, что получилось при решении конкретных задач и общей постановкой вопроса.

Ставится задача: «*Исследовать не одну функцию, а множество функций. Каждая из них получается из общего задания $y = ax^2 + bx + a$ при некотором значении коэффициента a*».

Здесь уместно ввести понятие *задачи с параметром*.

– Как ответить на вопрос о пересечении графика функции $y = ax^2+bx+a$ с осью Ox?

Достаточно было бы подобрать хотя бы одно значение a, при котором график функции $y = ax^2 + bx + a$ пересекает ось абсцисс, чтобы утверждать, что график не любой функции такого вида не пересекает ось абсцисс.

«Например, при $a = \frac{2}{5}$ график функции $y = \frac{2}{5}x^2 + x + \frac{2}{5}$ пересекает ось Ox в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = -\frac{2}{5}$» [8, с. 156].

– Как научиться подбирать такие значения параметра a?

В связи с этим могут быть поставлены, например, такие задачи:

«При каких значениях параметра a график $y = ax^2 + bx + a$ не пересекает ось абсцисс?

Укажите все значения параметра a, при которых график функции $y = ax^2 + bx + a$ пересекает ось Ox.

Сколько точек пересечения имеет график функции $y = ax^2 + bx + a$ с осью Ox?» [8, с. 156].

Методический прием, который применен нами в данном задании – постановка задачи, которая в частном виде может привести к ложным выводам и носит парадоксальный характер.

Основная база учебных умений при обучении школьников решению задач с явно заданным параметром состоит в следующем: уметь моделировать задачную ситуацию; научиться обращаться с параметром как с фиксированным, причем «равноправным» с другими данными, присутствующими в условии задачи; освоить простейшие случаи «ветвления», в большой степени характеризующие процесс решения тех задач, где параметр «управляет» поиском значений переменной; уметь устанавливать связи равносильности и следствия между условием задачи и предлагаемой моделью; научиться обобщать и анализировать полученные результаты и делать соответствующие выводы.

Принимая участие в рождении задач с параметрами, учащиеся сознательно подходят к их решению, учатся мыслить критически.

Кроме заданий, в которых обучающимся явно предлагается работа с параметрами, серия заданий МПИ-проекта содержит также задания, которые готовят школьников к аналитико-синтетической и прогностической деятельности по выявлению взаимосвязей между различными элементами проблемной ситуации. В частности, в систему заданий проекта «МПИ» входят задания, содержащие задачи с недостающими, избыточными, противоречивыми данными и т.д.

Для развития умения моделировать недостаточно, чтобы школьники просто диагностировали, что имеют дело с задачами с недостающими, избыточными, противоречивыми данными. Необходимо научить их доопределять задачу так, чтобы можно было найти математическую модель для ее решения.

Приведем пример такой работы.

Обучающимся предлагается задание: «*Первые два часа велосипедист ехал на 6 км/ч быстрее, чем остальные 3 ч. С какой скоростью ехал велосипедист первоначально?*»

Прежде всего, задается вопрос: можно ли ответить на вопрос задачи? Обучающиеся обнаруживают, что данных для ответа на вопрос недостаточно. Тогда им предлагается дополнить задачу так, чтобы ее можно было решить. Выслушав предложения школьников, можно, кроме того, предложить им поработать в рамках предлагаемых дополнений:

«*Дополните предложенную ситуацию следующими данными*:

1) ..., если за 5 ч он проехал ... км;

2) ..., если за первые 2 ч он проехал столько же, сколько за 3 ч;

3) ..., если за первые 2 ч он проехал на ... км меньше, чем за оставшиеся 3 ч;

4) ..., если за первые 2 ч он проехал 28 км;

5) ..., если в пути он находится 5 ч.

Появилась ли возможность решить задачу?» [4, с. 263].

Таким образом, школьники учатся определять полноту постановки задачи, подлежащей моделированию.

С одной стороны, так называемые неправильно поставленные задачи влияют на процесс рассуждений в ходе решения задачи, а с другой стороны, они также оказывают влияние и на сам процесс решения задачи. Школьники, исследуя проблемную ситуацию, получают устойчивые представления о текстовых задачах, в процессе решения которых можно использовать различные модели.

Заметим, что в ряде методических исследований идет поиск этапов работы, которые позволили бы учащимся быть успешными в процессе моделирования.

Так, А.Я. Блох, Р.В. Барзанова выделяют объективные закономерности текстовой задачи на составление уравнения, которые должен знать ученик:

а) в текстовой задаче всегда описывается некоторое явление реальной действительности: движение, работа, купля-продажа и пр. Оно характеризуется величинами – переменными (скорость, время, путь, производительность труда, объем работы, цена, количество, стоимость и т.п.);

б) ситуация, описанная в задаче, может состоять из нескольких частных ситуаций, т.е. из логически законченных частей задачи. В них отыскивается то же явление, что и в задаче, но относительно некоторых частных условий (движение до встречи, движение после встречи, работа по плану, работа фактическая и т.п.);

в) не все переменные, которые характеризуют ситуацию в условии задачи, явно заданы;

г) значения одних переменных известны, значения других – неизвестны;

д) среди неизвестных есть те, которые следует определить по вопросу задачи;

е) некоторые связи между переменными указаны в тексте задачи, хотя и не всегда явно, другие – не указаны [15, с. 84].

С помощью специальной системы заданий школьники учатся осознавать, что условие текстовой задачи должно представлять собой систему данных, необходимых и достаточных для определения значения искомой величины. Однако сложность их использования в решении задачи связана с тем, что не все данные задачи представлены в ее формулировке в явном виде.

К заданиям, которые готовят школьников к работе в парадигме «Что будет, если?..», отнесем и те, в которых проводится варьирование данных и искомых, предлагается оценить влияние этих изменений на модель. Приведем два примера.

Пример 1. «*Два поезда вышли навстречу друг другу одновременно из двух городов, расстояние между которыми 1260 км, и встретились через 7 ч после выхода. Скорость одного из них – 80 км/ч. Найдите скорость другого поезда.*

Ответьте, что произойдет, если:

а) слово “одновременно” в тексте задачи отсутствует;

б) слова “через 7 ч” заменили словами “через 2 ч”; “через 9 ч”;

в) слова “одновременно” заменили словами “причем второй поезд вышел на 2 ч позже первого”.

Запишите решение задачи в случае (*в*)» [4, с. 299].

Пример 2. «*Прочтите задачу. Предположим, что в условии задачи сделано одно из следующих изменений:*

Условие задачи	**Изменение условия**
На 3 ч раньше	*На 5 ч раньше*
На 3 ч раньше	*На 3 ч позже*
На 2 км больше	*На 7 км меньше*
В час	*В день*
Расстояние 180 км	*Расстояние 240 км*
Каждый… 180 км	*Один из велосипедистов должен был преодолеть расстояние 160 км, а другой – 200 км*
Первый велосипедист проехал расстояние в намеченный срок	*Первый велосипедист проехал расстояние на 3 ч раньше намеченного срока*

Составьте, если возможно, уравнения для полученных задач.

Сравните их с уравнением исходной задачи.

Какие из изменений условия задачи:

а) сохранили вид уравнения;

б) изменили вид уравнения (и суть задачи);

в) привели к противоречию в условиях задачи?» [7, с. 141].

Кроме заданий, в которых школьники учатся работать с изменениями в проблемной ситуации, обобщать ее, им предлагаются обратные задания, формирующие умения использовать различные модели для анализа проблемной ситуации.

Например, учащимся 6-го класса предлагается задание:

«*Изучите таблицу.*

Товар	**Цена (руб.)**	**Количество (кг)**	**Стоимость (руб.)**
I сорта	*36*	*10*	*360*
II сорта	*21*	*15*	*315*
Смесь	*27*	*25*	*675*

Пофантазируем: представим себе, что некоторые данные в таблице обладают свойством “исчезать”. Чтобы их восстановить, стали составлять уравнения.

Подумайте, какие данные “исчезли”, если получились такие уравнения:

а) $(25-x)\cdot 21+36x=675$; *б*) $21x+36\cdot(25-x)=675$;

в) $21\cdot 15+36x=675$; *г*) $21x+36\cdot 10=675$;

д) $21\cdot 15+36\cdot 10=x\cdot 25$; *е*) $21x+36y=675$.

Сформулируйте задачу, соответствующую каждому из этих уравнений» [5, с. 263].

Учащимся 8-го класса предлагается подобрать значение параметра в зависимости от заданных условий:

«*Цена часов снижена на столько процентов, сколько рублей стоили часы до снижения. На сколько процентов снижена цена часов, если после снижения они стали стоить т рублей.*

Подберите такое значение т, чтобы задача:

а) имела два ответа;

б) имела единственное решение;

в) не имела решений» [7, с. 118].

Итак, мы рассмотрели некоторые задания, входящие в систему заданий, направленных на развитие умения осуществлять моделирование. Данные задания прошли экспериментальную проверку в школах г. Томска и Томской области. Итоги эксперимента [16] показали, что специальная система заданий, направленная на развитие у учащихся осуществлять моделирование, способствует их успешности в решении текстовых задач, развивает умение мыслить критически, повышает интерес к предмету.

Литература

1. Виленкин Н.Я. Современные проблемы школьного курса математики и их исторические аспекты // Математика в школе. 1988. № 4.
2. Дьюи Д. Психология и педагогика мышления / Пер. с англ. Н.М. Никольской. М., 1990.
3. Далингер В.А. Совершенствование процесса обучения математике на основе целенаправленной реализации внутрипредметных связей / ОмИПКРО. Омск, 1993.
4. Гельфман Э.Г. и др. Натуральные числа и десятичные дроби. Практикум: Учеб. пос. по математике для 5 класса. Томск, 2003.
5. Гельфман Э.Г. и др. Положительные и отрицательные числа: Учеб. пос. по математике для 6 класса. Томск, 2001.
6. Гельфман Э.Г. и др. Знакомимся с алгеброй: Учеб. пос. по математике для 7 класса. Томск, 2002.
7. Гельфман Э.Г. и др. Квадратные уравнения: Учеб. пос. по математике для 8 класса. Томск, 2002.
8. Гельфман Э.Г. и др. Квадратичная функция: Учеб. пос. по математике для 9 класса. Томск, 2002.
9. Концепция и программа проекта «Математика. Психология. Интеллект». Математика 5–9 классы. Томск, 1999.
10. Маликова Н.Г. Развитие умения моделировать как средство обучения решению текстовых задач // Совершенствование процесса обучения математике в условиях модернизации российского образования: Мат-лы всерос. науч.-практ. конф. Волгоград, 26 окт. 2004 г. / Волгогр. гос. пед. ун-т. Волгоград, 2004.
11. Матушкина З.П. Приемы обучения учащихся решению математических задач: Учеб. пос. Курган, 2003.
12. Былков В.С. О характере использования математической модели в курсе алгебры и начал анализа // Методические рекомендации к практическим занятиям по методике преподавания математики (в средней школе и средних ПТУ) / Под ред. Р.С. Черкасова, А.Я. Блоха. М., 1985.
13. Толпенина Н.В. Методика организации учебных исследований при обучении учащихся решению уравнений, неравенств и их систем с параметрами: Афтореф. дис. ... канд. пед. наук. Омск, 2002.
14. Пойа Д. Как решать задачу: Пос. для учителей. М., 1961.
15. Блох А.Я., Барзанова Р.В. Методика работы над текстовой алгебраической задачей // Методические рекомендации по преподаванию математики в средней школе / Под ред. Р.С. Черкасова. М., 1979.
16. Маликова Н.Г. О некоторых проблемах, возникающих у учащихся при решении текстовых задачах // Сб. мат-лов шк.-семин. «Мастерство учителя в психологически ориентированных моделях обучения». Дидактика математики: сегодня и завтра. Томск, 2001.

И.Г. Попова

СТАНОВЛЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ АСПЕКТОВ СМЫСЛА ПОНЯТИЯ «НАТУРАЛЬНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ»

Барнаульский государственный педагогический университет

Изменение взглядов на школьное образование и связанный с этим переход к личностно ориентированному обучению сопровождается пересмотром содержания различных школьных предметов, путей постижения этого содержания учащимися. Последнее с неизбежностью ведет к обновлению учебных программ, отличающихся своей вариативностью, многообразием подходов к их созданию и реализации. Существенным изменениям подвергается и школьный курс математики. В качестве одной из моделей личностно ориентированного образовательного процесса при обучении математике нами выбран деятель-