Рассмотренные выше способы решения СЛАУ применялись к нахождению количественного состава компонентов органических смесей, а также в цифровом моделировании двумерных линейных систем (изображений).

Литература

1. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. С. 318.
2. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычисления с теплицевыми матрицами // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1983. Вып. 1. С. 124–266.
3. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987. 286 с.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1987. 592 с.
5. Hunt B. A matrix theory proof of the diskrete convolution theorem // IEEE Trans. Audio Electroacoust. 1971. Au-29. P. 285–288.
6. Литвин А.И., Кожуховский А.Д. Решение систем линейных алгебраических уравнений с использованием ортогональных дискретных преобразований // Вычислит. и прикладная математика. К.: Лыбидь, 1992. Вып. 74. С. 17–19.
7. Литвин А.И., Кожуховский А.Д. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений. Св-во №107 // ЦНИТИМ. Специализир. отд. отрасл. фонда алгоритмов и программ сист. автоматиз. проектных раб. для технологич. подгот. произв. и автоматиз-х сист. управл. технологич. процессом ОФАП САПРТ и АСУТП. М., 1989. 6 с.
8. Литвин А.И. Численное исследование систем с сосредоточенными и распределенными параметрами методом ортогональных дискретных преобразований: Дис. ... канд. физ. -мат. наук. Черкассы, 1991. 171 с.
9. Способ решения систем линейных алгебраических уравнений на ЭВМ / В.А. Поджаренко, А.Д. Кожуховский, А.И. Литвин, В.В. Присяжнюк. Винница, 1988. 10 с. Деп. в УкрНИИНТИ 26.05.88. № 1298 – Ук. 88.
10. Цифровое моделирование изображений / В.И. Быков, А.Д. Кожуховский, А.И. Литвин, Н.В. Молчунов // Электронное моделирование. 1991. Т. 13. № 2. С. 3–5.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975. 632 с.
12. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 315 с.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
14. Справочная математическая библиотека. ВЫСШАЯ АЛГЕБРА. М.: Наука, 1965. 300 с.
15. Rino C. The inversion of Covariance Matrices by Finite Fourier Transforms // IEEE Trans. Inform. theory. 1970. V. 16. P. 230–232.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных сотрудников. М.: Наука, 1986. 852 с.

УДК 621.391

А.И. Литвин, А.И. Май***

СВЯЗЬ ЭНТРОПИЙ ШЕННОНА И БОЛЬЦМАНА

*Институт оптического мониторинга СО РАН
**Томский государственный педагогический университет

В работе рассматривается связь энтропий Шеннона и Больцмана. Доказаны некоторые свойства введенной энтропии, а также показана возможность ее применения в теории кодирования.

Согласно определению Шеннона, энтропия системы определяется как

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i ,$$

где p_i - вероятность того, что система находится в заданном состоянии i. Для двоичной системы H= -(plogp+qlogq), где p – вероятность появления нуля, а q=(1-p) – вероятность появления единицы. Для потока из № i-независимых битов энтропия равна: H= -N(plogp+qlogq).

Очевидно, что теория информации не связана в этом случае с термодинамикой. Это положение можно изменить, если связать двоичный бит с квантом энергии. Предположим, что энергия бита равна e, если бит представляет нуль, и нулю, если бит представляет единицу. Связь между e (энергия бита) и E (энергией макросостояния) определяется вероятностью p [1]. Если система из N битов имеет m нулей, то p=m/N и E=Npe=me. Исходя из соотношения $\partial H/\partial Q=1/T$, где T – температура, Q – теплота, H – энтропия Больцмана, можно доказать теорему.

Теорема 1. Для больших N больцмановский множитель: exp(-e/kT) =p/q.

Доказательство. Рассмотрим соотношение $\partial H/\partial Q=1/T$; kQ=E. Тогда $\partial H/\partial E=1/kT$; H=log[N!/(m!(N-m)!)=log[g(E)], где k – постоянная Больцмана. Отсюда: 1/kT=(log[g(me)]-log[g((m-1)e)])/ΔA; ΔE/kT=log((N-m+1)/m). Далее, exp(e-/kT)= m/(N-m+1)=m/(N-m)(1-1/(N-m+1)=p/q(1-1/(N-m+1)). Для достаточно больших N: ΔE/kT≈log((N-m)/m); exp(-e/kT)≈m/(N-m)=p/q. Теорема доказана.

Из теоремы 1 можно получить следствия.

Следствие 2. Вероятность появления нуля равна $p=1/(1+\exp(\varepsilon/kT))$.

Следствие 3. Для последовательности из N независимых битов энтропия H равна $H=N(p\varepsilon/kT-\log q)$.

Доказательство. Известно, что $H=-dF/dT$, где $F=-T\log(1+\exp(-\varepsilon/kT))$, а $1+\exp(-\varepsilon/kT)$ – функция распределения для одного двоичного бита [1]. Для последовательности из N независимых битов

$H=N(\varepsilon/(kT(\exp\varepsilon/kT+1))+\log(1+\exp(-\varepsilon/kT)))=N(p\varepsilon/kT-\log q)$.

Следствия 2 и 3 устанавливают связь между энтропиями Шеннона и Больцмана. Заметим, что температура T и эквивалент постоянной Больцмана k будут физическими величинами, если рассматриваемая система является «чисто» физической. Если величина E не является физической энергией, то величины T и k выбираются различными способами и имеют разную размерность.

Данные результаты можно использовать при моделировании тепловых ЭВМ, экосистем, в теории кодирования, синергетике.

Покажем возможность использования полученных результатов в теории кодирования для способа кодирования длин серий (КДС).

Рассмотрим последовательность нулей и единиц, предполагая, что следующие друг за другом символы последовательности статистически независимы. Под серией из k нулей будем понимать двоичную последовательность 1000...00, начинающуюся единицей. Заканчивает серию нулей единица, которая входит первым символом в следующую единицу. Сообщение 1000000001000000-10000000100000100000000, например, можно закодировать в виде: 001, 11, 000, 10, 010.

Чтобы закодировать последовательность, опишем каждую серию двоичным числом, которое показывает число нулей в серии. Родовое число для серии из k нулей получается путем пропуска первого знака двоичного числа k+1. Первый знак двоичного числа, считая слева, всегда равен 1 и дает только информацию о положении. Эта информация дается в виде запятой в закодируемой последовательности. Необходимо добавлять к числу единицу, прежде чем удалить первый знак, чтобы обеспечить представление серии нулевой длины. В данном коде такая серия изображается двумя запятыми, следующими друг за другом.

Следствие 4. Среднее число нулей в серии равно

$$M(k)=\frac{p}{q}\approx\exp(-\varepsilon/kT).$$

Доказательство. Функция вероятности распределения двоичных символов F(k) $F(k)=qp^k$. Тогда

$$Mk=\sum_{k=0}^{\infty}kF(k)=q\sum_{k=0}^{\infty}kp^k=\frac{p}{q}\approx\exp(-\varepsilon/kT).$$

Согласно [2] среднее число двоичных символов, затрачиваемое на кодирование серии, определяетсякак

$$C=1+\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}p^{2^n}.$$

где n – количество двоичных символов, описывающих в общем случае серию из k нулей. Выходное сообщение ввиду разделительных знаков оказывается закодированным троичным кодом. Эквивалентное число троичных символов на серию равно $C\log_2 3$.

Относительную эффективность кодирования можно представить в виде $R=HL/l$, где H – энтропия, L – среднее число двоичных символов кодируемой последовательности, l – среднее число двоичных знаков в закодируемом сообщении. Величина

$$l=C\log_2 3;\quad L=\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)S(k)=\frac{1}{p-1}=\frac{1}{q}.$$

Следствие 5. Относительная эффективность способа КДС равна

$$R=\frac{HL}{l}=\frac{p\varepsilon kT-\log q}{qC\log_2 3}.$$

Для полной оценки способа КДС можно ввести коэффициент сжатия

$$K_c=\frac{1}{qC\log_2 3}=\frac{1+\exp(-\varepsilon/kT)}{C\log_2 3},$$

который показывает во сколько раз уменьшится количество двоичных символов в случае применения КДС в сравнении с посимвольной передачей исходной последовательности.

Для оценки эффективности сжатия информации можно применить следующий прием. Пусть запоминающее устройство состоит из m ячеек N-разрядной длины, которые заполняются 1-информативными сообщениями 0J и JN. Ввиду того, что события в каждом испытании независимы, то, используя известную формулу Бернулли из теории вероятностей, можно вычислить вероятность его появления ровно i-раз в N-разрядной ячейке. Формула Бернулли гласит, что вероятность появления события в N-независимых испытаниях ровно i-раз равна $P_N(i)=C^i_N p^i q^{N-i}$, где $p(0<p<1)$ – вероятность появления события; $q=1-p$. Отсюда $P_N(i)=C^i_N(p/q)^i q^N=C^i_N\exp(-i\varepsilon/kT)q^N$. Вероятность того, что собудет иметь вид $P_j=P_N(0)+P_N(1)+...+P_N(i)$, $0 \le j \le m$. Так как заполнения каждой ячейки независимы, то по теореме умножения вероятностей

$$P = \prod_{j=1}^{m} P_j.$$

Итак, метод кодирования длин серии в применении к двоичным последовательностям даст экономию символов, весьма близкую к достигаемой при оптимальном кодировании.

Литература

1. Джаблонски Д.Г. Идеальная тепловая машина как модель обратимых вычислений // ТИИЭР. 1990. Т. 78. № 5. С. 20-28.
2. Соловьев В.Ф. Рациональное кодирование при передаче сообщений. М.: Энергия. 1970. 66 с.