0, $t \in Z$ активен и не захвачен, то их логические координаты столбцов различны.

Следствием является:

Утверждение 15. Логические индексы любых двух активных процессоров, расположенных в соседних строках матрицы, различны.

Утверждение 16. Ненулевые логические координаты процессорных элементов различны.

Доказательство. Рассмотрим активные процессоры (i, j_1) и $(i+m, j_2)$, $m > 0$, $m \in Z$. При $m = 0$ справедливо утверждение 9 и логические индексы процессоров различны. При $m = 1$ справедливо утверждение 15 и логические индексы процессоров различны.

Пусть $m > 1$. Вычисляя логические номера строк по формуле (3), с учетом (5) получаем:

$i^{`}(i, j_1) = i + [z(i+1, j_1) \vee d(i+1, j_1-1)]$;

$i^{`}(i+m, j_2) = i + m + [z(i+1, j_2) \vee d(i+1, j_2-1)]$;

$i^{`}(i+m, j_2) - i^{`}(i, j_1) = m + [z(i+1, j_1) \vee d(i+1, j_1-1)] - [z(i+1, j_2) \vee d(i+1, j_2-1)] \geq m - 1 > 1 - 1 = 0$,

и логические номера строк различны.

Следовательно, для любых двух элементов процессорной матрицы логические координаты, вычисленные по формулам (3) и (4), будут различны, что и требовалось доказать.

Из справедливости утверждения 16 следует корректность предлагаемого алгоритма диагонального захвата для реконфигурации отказоустойчивой процессорной матрицы с сохранением структуры квадратной решетки.

Заключение

В настоящей статье предлагаются логические уравнения для вычисления сигналов перестройки по алгоритму диагонального захвата, позволяющему обеспечить отказоустойчивость процессорной матрицы. Разработан алгоритм вычисления новых логических индексов для процессорных элементов и доказана его корректность.

УДК 612.342

А.И. Литвин

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ С МАТРИЦАМИ ТЕПЛИЦА

*Институт оптического мониторинга СО РАН
**Томский государственный педагогический университет

Пусть имеется СЛАУ

$$AX=Y, \tag{1}$$

где A – невырожденная теплицева матрица порядка $N=2^n$; n – натуральное число. Матрица A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-N+1} \\ a_1 & a_0 & \dots & a_{-N+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Представим [1-4] $A=B-C$, где B – невырожденная матрица, имеющая простое обращение. Тогда (1) перепишем в виде:

$$BX=CX+Y. \tag{2}$$

Итерационный процесс можно проводить по схеме [2, 5]:

$$BX^{(n+1)}=CX^{(n)}+Y \tag{3}$$

или $X^{(n+1)} = Z+B^{-1}CX^{(n)}$, где $Z=B^{-1}Y$; n=0,1,...

Матрицу B можно получить с помощью ОДП Фурье или Уолша [6–10].

Пусть $TAT^{-1}=S$; $D=\mathrm{diag}S$, где T-ОДП Фурье или Уолша. Положим $TBT^{-1}=D$. Отсюда $B=T^{-1}DT$. Тогда $B^{-1}=T^{-1}D^{-1}T$. Нахождение матрицы D^{-1} не представляет труда ввиду ее диагональности. Описанный выше итерационный процесс сходится, если $\|B^{-1}C\|<1$. Сходимость подразумевается в смысле сходимости по норме матрицы A.

Ортогональные дискретные преобразования (ОДП) возможно использовать и при решении задач обращения матриц.

Будем считать, что обратная матрица B^{-1} начальная. Приближение матрицы B^{-1} к обратной матрице A^{-1} будем проводить по следующей формуле [11]:

$B^{-1}_{(k+1)} = B_k^{-1}(2E-AB_k^{-1})$; k=0,1, ...

Итерационный процесс можно считать законченным, когда $\|E-AB_n^{-1}\|<d$, где d – наперед заданное положительное число. Сходимость итерационного процесса обеспечивается условием [11]: $\|E-AB_0^{-1}\|<1$.

При этом условии итерационный процесс сходится быстро.

Рассмотрим другой способ решения СЛАУ с эрмитовыми матрицами. Для этого умножим слева СЛАУ AX=B, где A – невырожденная матрица порядка N, на сопряженную к A матрицу A^*. Получим: $A^*AX = A^*B$. Обозначим $A^*A = K$, $A^*B = Y$. Тогда

$$KX=Y. \tag{4}$$

Матрица K является эрмитовой, поэтому к ней можно применить теорему Шура, которая говорит о том, что можно найти ортогональное преобразование T, приводящее матрицу K к диагональному виду [1,5, 12–15].

Рассмотрим два способа решения СЛАУ вида (1) с приближенным нахождением обратной матрицы E^{-1}.

Пусть C=K+F. Матрицу C можно получить следующим образом [6–10]: $TKT^{-1} = R$; $S = \mathrm{diag}R$; $C = T^{-1}ST$. Отсюда $D = C^{-1} = T^{-1}S^{-1}T$.

Оценка аппроксимации матрицы K матрицей C неизвестна, так как она зависит от свойств матрицы C, от величины порядка матрицы K, а также от вида ортогонального преобразования T и т.д. Если такого вида аппроксимация не приводит к удовлетворительному результату, то можно представить обратную матрицу K^{-1} в виде ряда Неймана [5–8, 15]:

$$K^{-1}=[E+DF+(DF)^2+\ldots]D, \qquad (5)$$

где E – единичная матрица порядка N. Условием сходимости ряда Неймана (5) является выполнение условия $\|DF\|<1$. Если ряд (5) сходится, то можно найти d [5, 15, 16]:

$$\delta = \|K^{-1} - [E+DF+(DF)^2+\ldots+(DF)^M]D\|,$$

где δ – наперед заданное положительное число. По неравенству Шварца [5, 15, 16]:

$$\delta \le \frac{\|D\|\|DF\|^{M+1}}{1-\|DF\|}.$$

Отсюда

$$X=K^{-1}Y. \qquad (6)$$

Для решения СЛАУ вида (1) можно расширить класс эрмитовых матриц. Для этой цели введем следующее определение.

Определение 1. Квадратная матрица A называется почтиэрмитовой, если существует такая эрмитова положительно определенная матрица R, что матрица AR эрмитова.

Теорема 1. Матрица A почтиэрмитова тогда и только тогда, когда она подобна эрмитовой матрице.

Доказательство. Необходимость.

Пусть матрица A почтиэрмитова. Тогда справедливо следующее выражение $AR=RA^*$ ввиду того, что матрица R положительно определена, ее можно представить в виде $R=QQ^*$, где Q – невырожденная матрица. Тогда:

$$AQQ^*=QQ^*A. \qquad (7)$$

Умножая выражение (7) слева на Q^{-1} и справа на $(Q^*)^{-1}$, получим $Q^{-1}AQ=Q^*A^*(Q^*)^{-1}=(Q^{-1}AQ)^*$.

Из последнего равенства следует, что матрица $Q^{-1}AQ$ эрмитова, т.е. матрица A подобна эрмитовой матрице.

Достаточность. Пусть $Q^{-1}AQ=(Q^{-1}AQ)^*$, т.е. $Q^{-1}AQ=Q^*A^*(Q)^{-1}$.

Умножая последнее равенство слева на Q и справа на Q^*, получим $AQQ^*=QQ^*A$. Ввиду того, что матрица Q неособенная, то QQ^* – эрмитова и положительно определенная матрица. Теорема доказана. Теорема 1 на практике может быть малоэффективной, так как она не указывает способы нахождения матрицы R.

Теорема 2. Матрица A почтиэрмитова тогда и только тогда, когда ее собственные значения действительны, а соответствующие им собственные векторы линейно независимы.

Доказательство. Необходимость.

Поскольку эрмитова матрица имеет действительные собственные векторы, то этими свойствами обладает и любая подобная матрица.

Достаточность. Если матрица A имеет действительные собственные значения и линейно независимые собственные векторы, то $P^{-1}AP=D$, где D – матрица собственных значений, а P – матрица собственных векторов. Матрица A подобна эрмитовой и по теореме 2 она является почтиэрмитовой.

Замечание 1. Почтиэрмитовость матрицы A можно проверить путем исследования ее собственных значений и векторов.

Замечание 2. Теорема 2 верна и в том случае, когда матрица A имеет кратные собственные значения. Предположим, что l_1 – корень кратности *к*. Тогда существуют *к* линейно независимых векторов, соответствующих собственному значению l_1 а любой другой собственный вектор *у*, соответствующий l_1, есть линейная комбинация этих *к* векторов. Этот факт следует из теоремы [1, 12] и из следующей теоремы [1, 14]:

Если B – эрмитова матрица, то существует унитарная матрица U такая, что $B=ULU^*$, где U^* – сопряженная матрица к U, а L - диагональная.

Возникает вопрос: является ли класс почтиэрми-товых матриц подклассом нормальных матриц? На этот вопрос ответ следующий.

Из теорем 1 и 2 следует, что не всякая нормальная матрица является почтиэрмитовой. С другой стороны, можно привести пример, когда почтиэрмитова матрица не является нормальной матрицей.

Пример:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix};\quad R=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/3\\ 0 & 1 & 4/3\\ -1/3 & 4/3 & 1\end{bmatrix}$$

Легко проверить, что $AA^*\neq\Phi\, A^*A$, т.е. матрица A не является нормальной [1, 12–14], но R является положительно определенной матрицей и AR–эрмитова матрица. Таким образом, не всякая нормальная матрица является почтиэрмитовой, и наоборот.

Рассмотренные выше способы решения СЛАУ применялись к нахождению количественного состава компонентов органических смесей, а также в цифровом моделировании двумерных линейных систем (изображений).

Литература

1. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. С. 318.
2. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычисления с теплицевыми матрицами // Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1983. Вып. 1. С. 124–266.
3. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987. 286 с.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1987. 592 с.
5. Hunt В. A matrix theory proof of the diskrete convolution theorem // IEEE Trans. Audio Electroacoust. 1971. Au-29. P. 285–288.
6. Литвин А.И., Кожуховский А.Д. Решение систем линейных алгебраических уравнений с использованием ортогональных дискретных преобразований // Вычислит. и прикладная математика. К.: Лыбидь, 1992. Вып. 74. С. 17–19.
7. Литвин А.И., Кожуховский А.Д. Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений. Св-во №107 // ЦНИТИМ. Специализир. отд. отрасл. фонда алгоритмов и программ сист. автоматиз. проектных раб. для технологич. подгот. произв. и автоматиз-х сист. управл. технологич. процессом ОФАП САПРТ и АСУТП. М., 1989. 6 с.
8. Литвин А.И. Численное исследование систем с сосредоточенными и распределенными параметрами методом ортогональных дискретных преобразований: Дис. ... канд. физ. -мат. наук. Черкассы, 1991. 171 с.
9. Способ решения систем линейных алгебраических уравнений на ЭВМ / В.А. Поджаренко, А.Д. Кожуховский, А.И. Литвин, В.В. Присяжнюк. Винница, 1988. 10 с. Деп. в УкрНИИНТИ 26.05.88. № 1298 – Ук. 88.
10. Цифровое моделирование изображений / В.И. Быков, А.Д. Кожуховский, А.И. Литвин, Н.В. Молчунов // Электронное моделирование. 1991. Т. 13. № 2. С. 3–5.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975. 632 с.
12. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 315 с.
13. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
14. Справочная математическая библиотека. ВЫСШАЯ АЛГЕБРА. М.: Наука, 1965. 300 с.
15. Rino С. The inversion of Covariance Matrices by Finite Fourier Transforms // IEEE Trans. Inform. theory. 1970. V. 16. P. 230–232.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных сотрудников. М.: Наука, 1986. 852 с.

УДК 621.391

А.И. Литвин, А.И. Май***

СВЯЗЬ ЭНТРОПИЙ ШЕННОНА И БОЛЬЦМАНА

*Институт оптического мониторинга СО РАН
**Томский государственный педагогический университет

В работе рассматривается связь энтропий Шеннона и Больцмана. Доказаны некоторые свойства введенной энтропии, а также показана возможность ее применения в теории кодирования.

Согласно определению Шеннона, энтропия системы определяется как

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log p_1 ,$$

где p_i - вероятность того, что система находится в заданном состоянии i. Для двоичной системы H= -(plogp+qlogq), где p – вероятность появления нуля, а q=(1-p) – вероятность появления единицы. Для потока из N i-независимых битов энтропия равна: H= -N(plogp+qlogq).

Очевидно, что теория информации не связана в этом случае с термодинамикой. Это положение можно изменить, если связать двоичный бит с квантом энергии. Предположим, что энергия бита равна e, если бит представляет нуль, и нулю, если бит представляет единицу. Связь между e (энергия бита) и E (энергией макросостояния) определяется вероятностью p [1]. Если система из N битов имеет m нулей, то p=m/N и E=Npe=me. Исходя из соотношения $\partial H/\partial Q=1/T$, где T – температура, Q – теплота, H – энтропия Больцмана, можно доказать теорему.

Теорема 1. Для больших N больцмановский множитель: exp(-e/kT) =p/q.

Доказательство. Рассмотрим соотношение $\partial H/\partial Q=1/T$; kQ=E. Тогда $\partial H/\partial E=1/kT$; H=log[N!/(m!(N-m)!)=log[g(E)], где k – постоянная Больцмана. Отсюда: 1/kT=(log[g(me)]-log[g((m-1)e)])/ΔA; ΔE/kT=log((N-m+1)/m). Далее, exp(e-/kT)= m/(N-m+1)=m/(N-m)(1-1/(N-m+1)=p/q(1-1/(N-m+1)). Для достаточно больших N: ΔE/kT≈log((N-m)/m); exp(-e/kT)≈m/(N-m)=p/q. Теорема доказана.