

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

А.И. Литвин, А.В. Хон

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Эволюция береговой линии, как известно, так же как и развитие профилей рек и склонов, подчиняется уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = k \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где H – высота склона, k – коэффициент, принимающий в различных случаях разный физический смысл [1–3].

Рассмотрим уравнение (1) со следующими граничными и начальными условиями:

$$H(0, t) = H_0; H(l, t) = 0; H(x, 0) = H_1,$$

где l – длина склона, а H_0 – вершина склона.

В отличие от известного решения уравнения (1) – метода Фурье, можно использовать следующий способ решения с применением быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Пусть для уравнения теплопроводности (1) поставлена первая краевая (Дирихле) задача с вышеопределенными граничными и начальными условиями. Зафиксируем время t и рассмотрим сначала решение для уравнения Лапласа:

$$k \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Коэффициент k будем считать постоянным или не сильно изменяющимся в определенный промежуток времени t .

Решение уравнения (2) является простым и его можно представить в виде ряда Фурье [4]. Ввиду того что уравнение (1) является параболическим, решение

$H(x, t)$ на слое $t_1 = t_0 + \Delta t$ может быть определено, если известны его значения в предшествующем слое $t = t_0$.

Дискретное преобразование Фурье от уравнения (1) представим в виде:

$$H(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} C_n(t) e^{-ip_n x}, \quad (3)$$

где $p_n = 2\pi n / l$, $p_\tau = 2\pi \tau / T$; τ – переменная по времени; T – промежуток времени. Подставляя выражение (3) в уравнение (1), получим:

$$\frac{dC_n}{dt} = -kp_n^2 C_n.$$

$$\text{Отсюда, } C_n(t_0 + \Delta t) = C_n \exp(-kp_n^2 \Delta t).$$

Решение уравнения (1) будет следовать из преобразования Фурье, использующего известные коэффициенты $C_n(t_0 + \Delta t)$ [5].

Но сущность процесса развития склонов, профилей рек и ряда других природных процессов показывает, что коэффициент k изменяется одновременно в зависимости от x и t , и, следовательно, не может быть постоянной величиной. В работе [3] форма профиля склона записана в виде уравнения:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \{ (ax^2 + bx + c) e^{-\lambda t} \} \frac{\partial y}{\partial x} + \{ (ax^2 + bx + c) e^{-\lambda t} \} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4)$$

с начальными и граничными данными

$$y(x, 0) = \varphi(x); y(0, t) = \varphi_1(t); y(l, t) = \varphi_2(t).$$

В отличие от метода Фурье работы [3] к решению уравнения (4) можно применить вышеописанный спо-

соб решения. Распишем уравнение (4) в следующем виде:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \{(2ax + b)e^{-\lambda t}\} \frac{\partial y}{\partial t} + 2\{(ax^2 + bx + c)e^{-\lambda t}\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Будем считать $\partial y / \partial t = 0$ в начальный момент времени. Тогда

$$2\{(ax^2 + bx + c)e^{-\lambda t}\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \{(2ax + b)e^{-\lambda t}\} \frac{\partial y}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$y(x) = C_1 + C_2 \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right).$$

Дискретизируя граничные условия, можно найти постоянные C_1 и C_2 .

$y(x)$ и подставляя в уравнение (4) выражение для дискретного преобразования Фурье, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

Далее, разлагая в ряд Фурье решение уравнения (5)

$$\frac{dC(t)}{C} = -2e^{-\lambda t} \left\{ \frac{2(ax^2 + bx + c)}{p_n^2} - \frac{(2ax + b)i}{p_n} \right\} dt; \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (6)$$

Решение системы (6) имеет вид

Рассмотрим формирования профилей рек, склонов, вулканов и других природных процессов с другой стороны, а именно с использованием уравнений переноса. Разберем несколько случаев.

$$C(t + \Delta t) = C_n(t) (-\lambda \Delta t)^{\frac{z}{\lambda}}, \quad n = \overline{0, N-1},$$

где z – выражение в фигурных скобках.

Случай 1. Представляет особый интерес. Запишем для него дифференциальное уравнение (переноса)

$$\partial y / \partial t = -k(t) x \partial y / \partial x. \quad (7)$$

Решение уравнения (6) можно свести к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dy / dt = xy; \\ dx / dt = -k(t)x. \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим более подробно решение системы (8). Данная система имеет аналитическое решение в том случае, если функция $k(t)$ является интегрируемой, а также интеграл $\int e^{-\int k(t) dt} dt$ должен разрешаться в квадратурах. Если величина $k(t)$ не является интегрируемой или не разрешается вышеприведенный интеграл в квадратурах, то нужно применять численные методы для решения системы (8).

$$\begin{cases} dy / dt = y^2; \\ dx / dt = k / t. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = kx_0 \ln t; \\ y = y_0 + 1/t_0 - 1/t = y_1 - 1/t; \\ y = y_1 - \exp(x / kx_0). \end{cases}$$

Предположим, что функция $k(t)$ в определенный промежуток времени t является постоянной или ее изменение незначительно. Тогда решение системы (8) следующее:

$$\begin{cases} x = x_0 \exp(-kt); \\ y = y_0 \exp(x_0(1 - \exp(-kt)) / k); \\ y = y_0 \exp(x_0 - x) / k. \end{cases}$$

Для исследования устойчивости развития природных процессов можно использовать фракталы. В работе [6] предложены простые представления множеств Мандельброта и Жюлиа, удобные для численных исследований.

Известно, что множества Жюлиа описываются комплексным многочленом $p_c(z) = z^2 + c$, где c – комплексная переменная.

Случай 2. Ему будет соответствовать дифференциальное уравнение переноса (8) с известными начальными условиями.

Определение 1. Множество Жюлиа – это множество вида:

Уравнению (8) соответствует система из двух нелинейных обыкновенных уравнений (с учетом постоянства функции $k(t)$):

$$J_c = \{p_c(z) \in \bar{C} : \forall c \in C\},$$

где C – комплексная плоскость, а \bar{C} – ее замыкание.

Этот процесс можно выразить посредством итераций $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$. Точка ∞ будет сверхпритягивающейся неподвижной точкой для отображения $z \rightarrow p_c(z)$. Следовательно, множество Жюлиа J_c при каждом $c \in \bar{C}$ можно определить как $J_c = \partial A(\infty)$.

Из теории Жюлиа и Фату следует, что множество J_c будет связным или канторовым множеством. Если множество Жюлиа связно, то можно дать определение множества Мандельброта.

Определение 2. Множество Мандельброта – это множество вида: $M = \{c \in C: J_c \text{ связно}\}$.

Теперь в соответствии с теорией Жюлиа и Фату J_c является связным тогда и только тогда, когда $0 \notin A(\infty)$, т. е. $M = \{c \in C: p_c^k(0) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty\}$.

Такое определение множества M удобно для вычислений. Нужно выбрать решетку точек $c \in C$ и для каждой ее точки проверить, будут ли модули последовательности $0 \rightarrow c \rightarrow c^2 + c \rightarrow \dots$ после N итераций оставаться в пределах заданной верхней границы m или нет. Дуади и Хаббард в работе [6] показали, что множество M является связным, т. е. множество M состоит из всех точек $c \in C$, для которых множество Жюлиа J_c связное. Множество Жюлиа в этом случае содержит те начальные состояния, которые притягиваются к предельному циклу. Таким образом, имеется двойственная связь между этими множествами.

Используя такую интерпретацию множеств Жюлиа и Мандельброта, можно применить фрактальный подход к исследованию устойчивости процессов различной природы, которые можно описать в виде системы двух нелинейных обыкновенных уравнений первого порядка или в виде нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Найдя множество Мандельброта некоторой системы, можно получить представление об устойчивости процесса ее развития: если параметры системы находятся вдали от границы множества Мандельброта, то ее развитие устойчиво. Множество Жюлиа играет аналогичную роль для начального состояния системы.

Фрактальный подход можно применять к изучению устойчивости процессов формирования профилей склонов.

Следовательно, для исследования системы достаточно вычислить ее множество Мандельброта, что дает возможность определить поведение системы для любого значения $c \in C$. Построив для таких $c \in C$ множество Жюлиа, можно определить те начальные состояния системы, которые притягиваются к предельному циклу.

Исследуем систему (8), записанную в дискретной форме:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + x_n y_n \\ x_{n+1} = x_n - \gamma x_n \end{cases}$$

Для нее множество Мандельброта – это окрестности от 0 до 2 с выколотой точкой 0. На рисунке изображены профили объектов для следующих: $k = 0,2$ (a); $k = 0,99$ (b).

Из рисунка видно ($k = 0,2$), (a) что при малом изменении радиуса основания высота объекта очень быстро растет, что свидетельствует о неустойчивом поведении системы (8).

При $k = 0,99$ (b) система приходит в стационарное состояние, что показывает на устойчивое поведение системы (8).

Выводы. Из анализа вариантов рисунка можно сделать заключение, что чем ближе к границе множества Мандельброта параметр системы k , тем неустойчивее и хаотичнее ее поведение.

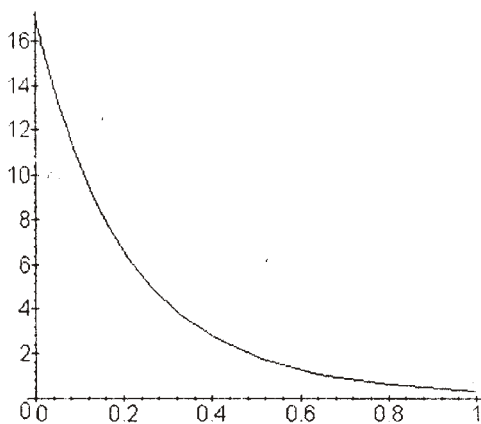


Рис. (a)

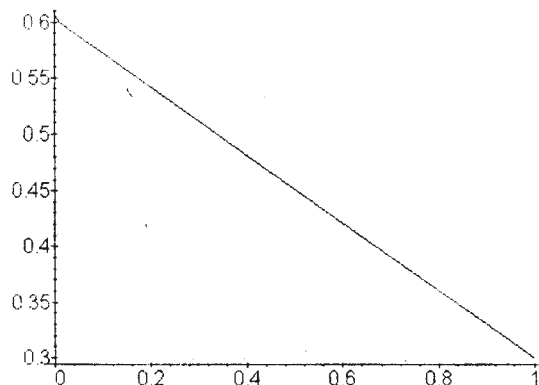


Рис. (b)

Литература

1. Шейдеггер А.Е. Теоретическая геоморфология. – М.: Прогресс, 1964. – 450 с.
2. Девдариани А.С. Математический анализ в геоморфологии. – М.: Недра, 1967. – 156 с.
3. Трофимов А.М. Основы аналитической теории развития склонов. – Казань: КГУ, 1974. – 212 с.
4. Ефимов А.В. Математический анализ. – Ч.1. Общие функциональные ряды и их приложения. – М.: Высш. школа, 1980. – 279 с.
5. Литвин А.И., Солдатов В.Н. Численное решение уравнения теплопроводности // Методы и алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса. – М.: МГЗПИ, 1985. – Вып. № 3. – С. 148–153.
6. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. – М.: Мир, 1993. – 176 с.

УДК 519.676

А.И. Литвин, А.И. Май

ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ СЖАТИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В настоящее время цифровые алгоритмические методы сжатия изображений с восстановлением – методы с наличием или отсутствием избыточности информации с поэлементной или пространственной обработкой. К методам сжатия-восстановления изображений с поэлементной обработкой можно отнести методы с сокращением информационной избыточности; на основе импульсно-кодовой модуляции с предсказанием, статистические; методы без сокращения информационной избыточности: статистические, с пополнением кадров. Методы сжатия-восстановления с пространственной обработкой, основанные преимущественно на сокращении избыточности информации, – это интерполяционный, на основе преобразований, на основе выделения признаков, символьные, гибридные и т. д. [1]. В настоящее время многие из банков видеоданных используют системы, реализующие методы сжатия-восстановления изображений с целью экономии памяти для последующей обработки изображений. Предлагаются два способа сжатия-восстановления изображений: кодирование длин серий (КДС) и на основе ортогональных дискретных преобразований (ОДП).

Рассмотрим алгоритм КДС. Известно, что кодирование с предсказанием менее эффективно, чем оптимальное кодирование. Однако в ряде случаев, когда статистика передаваемых сообщений известна или можно заранее предположить характер их изменения, практическое осуществление системы с предсказанием становится реальным. В сочетании с другими методами кодирования информации, например с известными методами КДС и КПД (коды переменной длины), операция предсказания может представлять практический интерес в силу простоты ее реализации [2].

Рассмотрим способ КДС подробнее. Если двоичные сообщения имеют низкую энтропию ($H \ll 1$), а символы независимы или слабо зависимы, то применение классического кодирования по Фано-Шеннону невыгодно. В этих случаях эффективным является способ КДС. Он заключается в передаче только маловероятных символов (например единицы или нуля) в

представлении кодом длины серий высоковероятными символами. Кратко проанализируем способ КДС. Будем считать, что сообщение состоит из нулей и единиц, которые статистически независимы. Пусть вероятность появления нуля в сообщении равна p , тогда вероятность появления единицы равна $q = 1 - p$. В этом случае под серией из k нулей будем понимать двоичную последовательность $1000\dots00$, начинающуюся единицей, или $000\dots01$, заканчивающуюся единицей. Последовательность из i единиц считается, как $i - 1$ серий нулей, каждая нулевой длины. Тогда функция вероятности распределения серий нулей в сообщениях имеет вид $F(k) = (1 - p)p^k = qp^k$, а среднее число нулей в серии находится

$$\sum_{k=0}^{\infty} kF(k) = (1 - p) \sum_{k=0}^{\infty} kp^k = \frac{p}{1 - p} = \frac{p}{q}.$$

Способ КДС является эффективным, хотя необходимость использования разделительных знаков между кодами длины серии снижает эффект сжатия сообщений. Среднее число двоичных символов определяется по формуле

$$C = 1 + \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} p^{2^n},$$

где n – количество двоичных символов, охватывающих серию из нулей. При использовании разделительных знаков выходное сообщение будет закодировано троичным кодом, поэтому эквивалентное число двоичных символов на серию будет равно $C = \log_2 3$. Укажем способ эффективности такого кодирования.

Относительную эффективность можно определить как

$$R = \frac{-(p \log_2 p + q \log_2 q)}{qC \log_2 3},$$

где $-(p \log_2 p + q \log_2 q)$ – исходная энтропия на символ, $1/q$ – среднее число составляющих серию двоичных символов. Величина относительной эффективности показывает близость КДС к оптимальному кодированию.

Для этого способа коэффициент сжатия информации определяется как