УДК 378.02:016 (14.35.09)

И. Г. Липатникова, Т. Ю. Паршина

ФОРМИРОВАНИЕ КОГНИТИВНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ КУРСУ «ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА»

Обоснована необходимость формирования когнитивной компетентности и выделены ее характеристики. Показана целесообразность выбора элементарной математики для организации учебной деятельности студентов, направленной на формирование когнитивной компетентности, и выбора эвристических математических задач в качестве средства формирования. Предложены механизмы преобразования математической информации, заключенной в текстах этих задач. Это формализация суждений с помощью языков логики высказываний, логики предикатов и изоморфизма интерпретаций. Показана возможность интеграции курсов элементарной математики с курсом математической логики.

Ключевые слова: *когнитивная компетентность, эвристическая задача, самообразовательная деятельность, математическая логика.*

Изменения, происходящие в обществе, существенным образом повлияли на подготовку учителей. В настоящее время востребованы учителя, способные к самообразованию, саморазвитию, самостоятельному принятию профессиональных решений. Указанные требования зафиксированы в Федеральном государственном стандарте высшего профессионального образования третьего поколения в виде компетенций и являются признаками сформированности у учителя математики когнитивной компетентности.

В исследовании *когнитивную компетенцию* понимаем как интегральное качество личности, определяющее ее готовность к постоянному повышению образовательного уровня, потребность в актуализации и реализации своего личностного потенциала, способность к приобретению новых знаний и умений, способность к саморазвитию. А *когнитивную компетентность* – как личностное качество, основанное на опыте проявления компетенции.

Анализ литературы [1–6] позволяет выделить следующие характеристики когнитивной компетентности:

– степень сформированности у личности познавательных процессов;

– степень сформированности компонентов учебно-познавательной деятельности;

– степень сформированности стремления к постоянному самообразованию.

Формирование когнитивной компетентности учителей математики осуществляется в процессе их профессиональной подготовки в педагогических вузах при обучении различным дисциплинам. Однако для формирования когнитивной компетентности у будущих учителей математики большие возможности имеет курс элементарной математики, который обладает особенностями, выгодно отличающими его от других. Во-первых, его логическая структура сходна со школьным курсом математики; во-вторых, совпадающая терминология трактуется шире и глубже, чем в школе. Это позволяет формировать приемы самообразовательной деятельности. В связи с этим возникает потребность выбора средств для их формирования.

Самообразовательная деятельность студента связана с «открытием» нового для него знания. Вследствие этого в качестве средств организации такой деятельности в процессе обучения элементарной математике будем рассматривать эвристические математические задачи. Это связано с тем, что реализация творческого потенциала помогает человеку адаптироваться в окружающем мире, а владение эвристиками и эвристическими приемами способствует нахождению средств, методов, путей поиска этой адаптации [7].

Существуют различные подходы к толкованию эвристической задачи. Так, А. М. Матюшкин [8] определяет эвристическую задачу как задачу, решение которой предполагает хотя и управляемый, но самостоятельный поиск еще не известных закономерностей, способов действия, правил. Эти задачи возбуждают активную мыслительную деятельность, сделанное открытие приносит эмоциональное удовлетворение и прочнее закрепляется в памяти. В свою очередь, А. Я. Цукарь [9] говорит, что это задача, для решения которой необходимо выявить некоторые скрытые связи между элементами условия и требования или найти способ решения, причем этот способ не является очевидной конкретизацией некоторого обобщенного правила, известного ученику, или сделать и то и другое. По мнению Е. И. Скафа [10], эвристическая задача – это задача, которая предполагает самостоятельное формулирование способа ее решения, в процессе которого ученик попадает в ситуацию проявления своих эвристических позиций. На основе анализа литературы в исследовании под эвристической задачей понимается задача, поиск решения которой направлен на открытие нужного метода решения.

В исследовании придерживаемся точки зрения И. Я. Лернера [11], что решение эвристической задачи требует следующих умений: анализировать ее условие, преобразовывать основные проблемы в ряд частных, подчиненных главной, проектировать план и этапы решения, формулировать гипотезу, синтезировать различные направления поисков, проверять решение. Анализ условия, разбиение задачи на подзадачи, синтез различных поисков решения связаны с преобразованием математической информации, заложенной в тексте задачи. Эти преобразования выполняются на основании подходящих теорем, свойств, определений и законов математической логики. Они могут происходить как в рамках одного языка – естественного или математического (уравнений, неравенств, функций, графических образов), так и как переход к другому. В результате возникает новая задача, которая должна быть равносильной первоначальной. В математике имеются средства, позволяющие это проверить, а именно – формализация суждений с помощью языков логики высказываний, логики предикатов и изоморфизма интерпретаций.

В настоящее время, как отмечают О. В. Янущик, А. И. Шерстнёва, Е. С. Пескова, «первостепенное значение в совершенствовании содержания образования приобретают такие компоненты, которые отражают тенденции интеграции научного знания» [12, с. 85]. В учебном плане подготовки бакалавра педагогического образования по профилю «Математика» элементарная математика изучается в 4–8 семестрах, а математическая логика – в 5 семестре [13]. Таким образом, возможно интегрирование этих двух дисциплин в процессе подготовки будущего учителя математики.

Приведем примеры эвристических задач. Первая задача показывает применение логики предикатов к преобразованию текста задачи к виду, более удобному для решения.

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых значение выражения $\dfrac{\left|x^2+ax+1\right|}{\left|x^2+x+a\right|}$ будет принимать значение, равное 1, при единственном значении переменной $x\in[-1;\,1)$.

Студентам предлагается записать на языке предикатов условие и требование задачи. Прочитать и записать новую формулировку задачи. Объяснить, к чему теперь сводится решение задачи. Ход решения может выглядеть так. Введем предикаты: $x\in[-1;\,1)$ и $\dfrac{\left|x^2+ax+1\right|}{\left|x^2+x+a\right|}=1$. Искомое множество параметра a обозначим A. Тогда требование задачи можно сформулировать следующим образом: «Найти все элементы множества A такие, что среди корней уравнения $\dfrac{\left|x^2+ax+1\right|}{\left|x^2+x+a\right|}=1$ только один находится на промежутке $[-1;\,1)$». На языке логики предикатов это запишется так:

$$\underset{a\in A}{\forall a}\ \exists!x\left(x\in[-1;\,1)\ \wedge\ \frac{\left|x^2+ax+1\right|}{\left|x^2+x+a\right|}=1\right).$$

Прочитаем: «Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{\left|x^2+ax+1\right|}{\left|x^2+x+a\right|}=1$ имеет ровно один корень на промежутке $[-1;\,1)$».

Задача сводится к нахождению таких значений параметра, что система $\begin{cases} x^2+x+a\neq 0\\ \left[\begin{array}{l} x^2+x+1=\ \ x^2+x+a\\ x^2+x+1=-x^2-x-a\end{array}\right.\\ -1\le x<1\end{cases}$ имеет единственное решение.

Следующие две задачи показывают применение языка логики высказываний и логики предикатов для обнаружения ошибок в решении.

Задача 2. Найдите ошибки в решении уравнения $\sqrt{x^4(x-1)}+2x^2=0.$

$$x^2\sqrt{x-1}+2x^2=0; \qquad (1)$$

$$x^2\left(\sqrt{x-1}+2\right)=0; \qquad (2)$$

$$x^2=0; \qquad (3)$$

$$x=0. \qquad (4)$$

Ответ: $x=0$.

Для поиска мест, где допущены ошибки, воспользуемся языком логики высказываний: в каждое уравнение, включая исходное, подставим найденный корень $x=0$. Определим истинностное значение каждого высказывания. Если два соседних высказывания имеют разное истинностное значение (т. е. эквиваленция ложна), то на этом шаге была допущена ошибка.

В примере:

$\sqrt{0^4\cdot(0-1)}+2\cdot 0^2=0$ истина

$0^2\cdot\sqrt{0-1}+2\cdot 0^2=0$; (1’) ложь

(левая часть равенства не определена)

$0^2\cdot\left(\sqrt{0-1}+2\right)=0$; (2’) ложь

(левая часть равенства не определена)

$0^2=0$; (3’) истина

$0=0$. (4’) истина.

Можно утверждать, что допущены две ошибки: при преобразовании первого слагаемого $\sqrt{x^4(x-1)}$ и при делении на положительное

$\sqrt{x-1}+2$. Определим причины ошибок и приведем правильное решение.

На первом шаге выражение $\sqrt{x^4(x-1)}$ заменили на $x^2\sqrt{x-1}$, другими словами, прошло применение трех свойств $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{a^4}=\left|a^2\right|$ и $\left|a^2\right|=a^2$. Второе и третье тождества справедливы при всех действительных *a*, поэтому их применение не могло вызвать ошибку. Первое тождество имеет разные области определения левой и правой части, значит, при его использовании может произойти ошибка. Действительно, если $a=0$ и $b<0$, то левая часть тождества существует, в то время как в правой существует только первый сомножитель. Именно это мы и видим в выражении $x^2\sqrt{x-1}$ при $x=0$. Таким образом, на первом шаге прошло сужение ОДЗ, повлекшее потерю корня $x=0$. Число 0 не является корнем уравнения $x^2\sqrt{x-1}+2x^2=0$, это демонстрирует равенство (1'). Второй шаг – вынесение множителя за скобки, т. е. применение распределительного закона, который не искажает ОДЗ. На третьем шаге выполнено деление на выражение $\sqrt{x-1}+2$, которое не может обратиться в нуль как сумма неотрицательного и положительного чисел. Само деление возможно. Однако оно вызывает расширение ОДЗ (теперь ОДЗ – все множество действительных чисел), а значит, возможен захват посторонних корней. Что и произошло: вернулся корень $x=0$.

Уравнение следовало бы решить так.

Первый способ (уединение радикала с последующим возведением в квадрат):

$\sqrt{x^4(x-1)}=-2x^2$;

$x^4(x-1)=4x^4$;

$x^4(x-1)-4x^4=0$;

$x^4(x-1-4)=0$;

$x=0$ или $x=5$.

Проверка. $\sqrt{0}+0=0$ верно, $\sqrt{5^4\cdot 4}+2\cdot 5^2=0$ неверно.

Ответ: $x=0$.

Второй способ (разбор случаев, порожденных ОДЗ).

Найдем ОДЗ уравнения $x^4(x-1)\geq 0$, откуда $x=0$ или $x\geq 1$. Разберем эти два случая. Пусть $x=0$, тогда уравнение принимает верное равенство, и это корень уравнения. Пусть $x\geq 1$, тогда левая часть уравнения положительна как сумма неотрицательного и положительного чисел, и, значит, $\sqrt{x^4(x-1)}+2x^2=0$ не имеет корней на множестве $[1;\infty)$.

Ответ: $x=0$.

Третий способ (учет множества значений левой и правой части).

Левая часть уравнения $\sqrt{x^4(x-1)}+2x^2=0$ представляет собой сумму двух неотрицательных чисел, поэтому равенство нулю возможно тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю: $\begin{cases}\sqrt{x^4(x-1)}=0\\ 2x^2=0\end{cases}$. Решаем эту систему:

$\begin{cases}x^4(x-1)=0\\ x^2=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=0 \quad \text{или} \quad x-1=0\\ x=0\end{cases}$, $x=0$.

Ответ: $x=0$.

Задача 3. В процессе решения система $\begin{cases}(2x^2-5x-3)\sqrt{\cos y}=0\\ \sin y=x\end{cases}$ была заменена совокупностью $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-5x-3=0\\ \sin y=x\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{\cos y}=0\\ \sin y=x\end{cases}\end{array}\right.$. Запишите систему и совокупность на языке логики предикатов. Сравните полученные формулы логики предикатов. Найдите ошибку. Объясните, к чему она может привести. Исправьте допущенную ошибку.

Решение. Введем обозначения $f(x)=2x^2-5x-3$, $g(y)=\sqrt{\cos y}$, $P(x;\,y)=\{\sin y=x\}$. Система запишется так: $f(x)\cdot g(y)=0\wedge P(x;y)$, а совокупность $(f(x)=0\wedge P(x;y))\vee(g(y)=0\wedge P(x;y))$. Полученные две формулы логики предикатов не являются эквивалентными. Пары значений переменных $(x;y)$, попадающие в область истинности предиката $f(x)=0\wedge P(x;y)$ лежат в области истинности $(f(x)=0\wedge P(x;y))\vee(g(y)=0\wedge P(x;y))$, но могут не попадать в область истинности $f(x)\cdot g(y)=0\wedge P(x;y)$, причем это будет происходить только в случае, если значение переменной *y* не находится в области допустимых значений переменной предиката $g(y)$. Аналогична ситуация, когда пара значений переменных $(x;y)$ попадает в область истинности предиката $g(y)=0\wedge P(x;y)$. Другими словами, имеется переход к следствию, а значит, возможно приобретение посторонних решений. Чтобы сохранить равносильность, надо не только обращать в нуль сомножители, но и требовать существование другого множителя. На языке предикатов этот закон выглядит так:

$f(x)\cdot g(y)=0 \Leftrightarrow \left(f(x)=0\ \wedge\ \exists g(y)\right)\ \vee$

$\vee\ \left(g(y)=0\ \wedge\ \exists f(x)\right)$. Поэтому должна быть совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-5x-3=0\\ \cos y\geq 0\\ \sin y=x\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{\cos y}=0\\ \sin y=x\end{cases}\end{array}\right.$$

В рассмотренном примере была сделана логическая ошибка, связанная с переходом к дизъюнкции. Покажем использование языка предикатов для нахождения ошибки, полученной в результате неверного применения определения.

Задача 4. Нечетная функция $y=f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x)=x(2x+1)(x-2)(x-3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x)=0$?

Студентам предлагается найти и исправить ошибку в следующем решении.

Пусть $x\geq 0$, тогда уравнение $f(x)=0$ примет вид: $x(2x+1)(x-2)(x-3)=0$. Откуда $\underline{x=0}$, или $x=-\frac{1}{2}$ (посторонний корень), или $\underline{x=2}$, или $\underline{x=3}$. Пусть теперь $x<0$, тогда $-x>0$ и в силу нечетности функции f: $f(-x) = -f(x) = -g(x) = -x(2x+1)(x-2)(x-3)$. Уравнение $f(x)=0$ примет вид $-x(2x+1)(x-2)(x-3)=0$. Откуда $x=-\frac{1}{2}$. Ответ: 4 решения.

Примерный вариант рассуждения. Проверяем цепочку равенств: $f(-x) = -f(x) = -g(x) = -x(2x+1)(x-2)(x-3)$.

1 шаг: $f(-x)=-f(x)$. (По определению нечетной функции $\forall x\ f(-x)=-f(x)$). В частности, при $x<0$. Ошибки нет.

2 шаг: $-f(x)=-g(x)$. По условию задачи $\forall x\ \left(x\geq 0\ \Rightarrow f(x)=g(x)\right)$. Выбран $x<0$, значит, воспользоваться этим условием нельзя. Ошибка!

Можно исправить так:

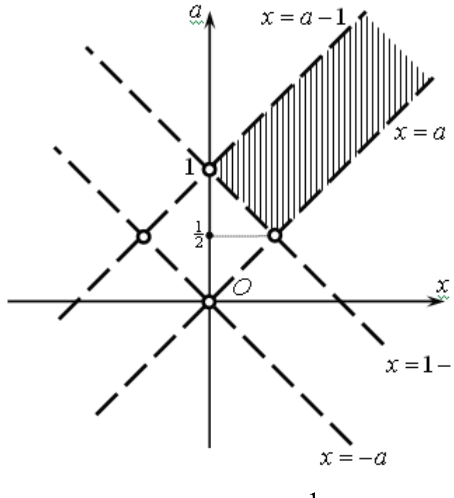
$f(-x) = g(-x) = (-x)(2(-x)+1)((-x)-2)((-x)-3) = x(-2x+1)(-x-2)(-x-3) = x(-2x+1)(x+2)(x+3)$. Уравнение $f(x)=0$ примет вид $x(-2x+1)(x+2)(x+3)=0$. Откуда: $x=0$ (посторонний корень), или $x=\frac{1}{2}$ (посторонний корень), или $\underline{x=-2}$, или $\underline{x=-3}$.

Задачу удобнее решать, опираясь на нечетность функции: если a – корень уравнения $f(x)=0$, т. е. $f(a)=0$, то и $f(-a)=-f(a)=-0=0$. Таким образом, ненулевые корни группируются в пары противоположных. Найдено два положительных, значит, добавятся противоположные к ним отрицательные. Учтем еще, что 0 корень. Итого 5 корней уравнения.

Покажем идею изоморфизма интерпретаций.

Задача 5. Решить неравенство $\log_{a+x}x(a-x)<\log_{a+x}x$.

Процесс решения начинается с преобразований левой части неравенства. Произведение $x(a-x)$ положительно и первый сомножитель положителен, так как существует правая часть неравенства. Заключаем, что второй сомножитель положителен и можно применить формулу логарифма произведения $\log_{a+x}x+\log_{a+x}(a-x)<\log_{a+x}x$. Приводим подобные слагаемые и требуем сохранение области допустимых значений: $\begin{cases}\log_{a+x}(a-x)<0\\ x>0\end{cases}$. Заменяем 0 на $\log_{a+x}1$, получаем систему $\begin{cases}\log_{a+x}(a-x)<\log_{a+x}1\\ x>0\end{cases}$ и преобразуем ее в совокупность $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+x>1\\ 0<a-x<1\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<a+x<1\\ a-x>1\\ x>0\end{cases}\end{array}\right.$. Решение совокупности аналитическим методом оказывается громоздким. Более удобно обратиться к графическому методу. Сопоставим каждой паре (x; a), являющейся решением совокупности, точку плоскости с координатами (x; a) в декартовой системе координат Oxa. Каждое из них имеет первую степень и, значит, представляет собой множество точек плоскости, ограниченное прямой линией. Построим на координатной плоскости границы $a+x=1$, $a-x=0$, $a-x=1$, $x=0$, $a+x=0$. Покроем штриховкой множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют совокупности неравенств.



Считываем ответ: если $a\leq\frac{1}{2}$, то нет решений;

если $\frac{1}{2} < a \leq 1$, то $1 - a < x < a$; если $a > 1$, то $a - 1 < x < a$.

Включение в процесс обучения студентов педвуза элементарной математике эвристических задач указанных видов побуждает студента к самостоятельной познавательной деятельности. Опора на аппарат математической логики помогает проверить надежность решений, а поиск ошибок в готовых решениях вынуждает студента обосновывать каждое свое действие. Таким образом, решение студентами эвристических математических задач способствует формированию у них когнитивной компетентности.

Список литературы

1. Вязовова Е. В. Формирование когнитивной компетентности у учащихся на основе альтернативного выбора учебных действий (на примере обучения математике). Нижний Тагил, 2009. 140 с.
2. Овчарова Р. В. Психология менеджмента: учеб. пособие. Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та. 2005. 122 с.
3. Осипова Л. А. Информационно-образовательные проекты как средство формирования у студентов когнитивной компетентности: дис. … канд. пед. наук: Брянск, 2008. 146 с.
4. Потанина О. В. Когнитивная компетенция будущего инженера: сущность, структура, содержание // Вестн. Башкирского ун-та. Раздел педагогика и психология. 2009. Т. 14, № 1 С. 298–301.
5. Семина Л. В. К вопросу о формировании когнитивной компетентности в самостоятельной работе студентов // Вестн. Московского гос. областного ун-та. Серия «Педагогика». № 1. М.: Изд-во МГОУ, 2010. С. 223–225.
6. Семина Л. В. Диагностический и мотивационный этапы формирования когнитивной самостоятельности в процессе обучения бакалавров: сетевой журн. URL: http://www.econf.rae.ru/pdf/2010/03/1fc214004c.pdf
7. Саранцев Г. И. Методика обучения математике на рубеже веков // Математика в школе. 2000. № 7. С. 2–5.
8. Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М.: Педагогика, 1972. 168 с.
9. Цукарь А. Я. О типологии задач // Современные проблемы методики преподавания математики: сб. статей / сост. Н. С. Антонов, В. А. Гусев. М.: Просвещение. 1985. С. 132–139.
10. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике в контексте синергетического подхода: сетевой журн. URL: http://www.fmi-plovdiv.org/GetResource?id=681
11. Лернер И. Я. Проблемное обучение. М.: Знание, 1974. 64 с.
12. Янущик О. В., Шерстнёва А. И., Пескова Е. С. Повышение качества математического образования студентов интеграцией разделов алгебры и аналитической геометрии на примере изучения систем линейных неравенств // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (Tomsk State Pedagogical University Bulletin). 2010. Вып. 12 (102). С. 84–88.
13. Примерная основная образовательная программа высшего профессионального образования. Направление подготовки 050100 «Педагогическое образование», профиль «Математика». URL: http://www.mpgu.edu/about/

Липатникова И. Г., доктор педагогических наук, зав. кафедрой.
Уральский государственный педагогический университет.
Ул. К. Либкнехта, 9, Екатеринбург, Россия, 620151.
E-mail: lipatnikovaig@mail.ru

Паршина Т. Ю., аспирант, ст. преподаватель.
Уральский государственный педагогический университет.
Ул. К. Либкнехта, 9, Екатеринбург, Россия, 620151.
Нижнетагильская государственная социально-педагогическая академия.
Ул. Красногвардейская, 57, Нижний Тагил, Свердловская область, Россия, 622031.
E-mail: ki2507@rambler.ru

Материал поступил в редакцию 10.07.2012.

I. G. Lipatnikova, T. Y. Parshina

THE FORMATION OF COGNITIVE COMPETENCE OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS WHILE STUDYING THE COURSE "ELEMENTARY MATHEMATICS"

The necessity of cognitive competence formation is substantiated and its characteristics are sorted out. The suitability of the choice of elementary mathematics for organizing students' academic activity aiming at forming cognitive competence and selection of heuristic mathematical problems as the means of formation is presented. The mechanism of transforming mathematical information contained in the texts of these problems is suggested. This is formalization of statements with the help of the language of logic of utterance, logic of predicates and isomorphism of interpretations. The possibility of integration between the course of elementary mathematics and the course of mathematical logic is shown.

Key words: *cognitive competence, heuristic problem, self-education activity, mathematical logic.*

Lipatnikova I. G.
Ural State Pedagogical University.
Ul. K. Libknkhta, 9, Ekaterinburg, Russia, 620151.
E-mail: lipatnikovaig@mail.ru

Parshina T. Y.
Ural State Pedagogical University.
Ul. K. Libknkhta, 9, Ekaterinburg, Russia, 620151.
Nizhniy Tagil Social Pedagogical Academy.
Ul. Krasnogvardeyskaya, 57, Nizhniy Tagil, Sverdlovsk region, Russia, 622031.
E-mail: ki2507@rambler.ru