МАТЕМАТИКА

УДК 519.23/25

П.М. Лавров, О.В. Радченко, М.А. Рудык

О ВЫЧИСЛЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СУММ

Томский государственный педагогический университет

В данной работе рассматриваются алгебраические суммы следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^m = I_n^m, \tag{1}$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты. Для $m = 0,1$ значения сумм (1) приведены, например, в справочнике [1], а для $m < n$ в [2], и во всех перечисленных случаях суммы равны нулю. Для значений $m = n$ суммы (1) встретились в [3] при изучении асимптотик вероятностей излучения в квантовой электродинамике. Там, в частности, было установлено, что для $m = n$: $I_n^n = (-1)^n n!$. С рассматриваемыми суммами тесно связано решение задачи о числе m перестановок с повторениями из n элементов при условии, что каждый элемент появляется в указанных выборках хотя бы один раз. Решение дается суммами (см., напри-

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)^m = n! S(m,n) = (-1)^n I_n^m, \tag{2}$$

где $S(m, n)$ – числа Стирлинга 2-го рода, определяемые из соотношения

$$t \ = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) t_{[k]}\underset{m_{n-3}}{,} \ t_{[k]} = t(t-1)...(t-k+1). \tag{3}$$

Эти числа удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$S(m+1,n) = S(m,n-1) + nS(m,n). \tag{4}$$

Таким образом, изучение сумм (1) тесно связано с построением чисел Стирлинга 2-го рода. Покажем, что построение этих чисел можно свести к задаче вычисления сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = N_n^p, \tag{5}$$

где p – натуральное число.

В качестве производящих функций $f_n(x)$ для сумм (1) можно выбрать

$$f_n(x) = (1-e^x)^n. \tag{6}$$

Тогда

$$I_n^m = \frac{d^m}{dx^m} f_n(x)\Big|_{x=0}. \tag{7}$$

Вычисляя последовательно производные от функций (6), получим

$$f_n^{(1)}(x) = (-1) n f_{n-1}(x) e^x,$$

$$f_n^{(2)}(x) = (-1)^2 n(n-1) f_{n-2}(x) e^{2x} + (-1) n f_{n-1}(x) e^x$$

и так далее. Методом математической индукции нетрудно доказать, что производная k-го порядка $f_n^{(k)}(x)$ при $k < n$ имеет вид

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} f_{n-k}(x) e^{kx} + \\ + \sum_{s=1}^{k-1} (-1)^s \frac{n!}{(n-s)!} \left(\sum_{m_1=1}^{s} m_1 \sum_{m_2=1}^{m_1} m_2 ... \sum_{m_{k-s}=1}^{m_{k-s+1}} m_{k-s} \right) f_{n-s}(x) e^{sx}, \tag{8}$$

при этом $f_n^{(k)}(0) = 0$, $k < n$ и, следовательно, $I_n^k = 0$, $C(k,n) = 0$ при таких значениях .

Для $k = n$ получаем следующее представление для производной:

$$f_n^{(n)}(x) = (-1)^n n! e^{nx} + (-1)^{n-1} n! \left(\sum_{m_1=1}^{n-1} m_1 \right) f_1(x) e^{(n-1)x} + \\ + (-1)^{n-2} \frac{n!}{2!} \left(\sum_{m_1=1}^{n-2} m_1 \sum_{m_2=1}^{m_1} m_2 \right) f_2(x) e^{(n-2)x} + ... + \\ + (-1)^2 \frac{n!}{(n-2)!} \left(\sum_{m_1=1}^{2} m_1 \sum_{m_2=1}^{m_1} m_2 ... \sum_{m_{n-3}=1}^{m_{n-2}} m_{n-3} \right) f_{n-2}(x) e^{2x} + \\ + (-1) \frac{n!}{(n-1)!} \left(\sum_{m_1=1}^{1} m_1 \sum_{m_2=1}^{m_1} m_2 ... \sum_{m_{n-2}=1}^{m_{n-3}} m_{n-2} \right) f_{n-1}(x) e^x \tag{9}$$

и $f_n^{(n)}(0) = (-1)^n n!, \ I_n^n = (-1)^n n!, \ S(n,n) = 1.$

Дифференцируя (9), получаем выражение, например, для производной порядка $n + 1$:

$$f_n^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \left(n + \sum_{m_1=1}^{n-1} m_1 \right) \varphi_0(x) + \\ + (-1)^{n-1} n! \left((n-1) \sum_{m_1=1}^{n-1} m_1 + \sum_{m_1=1}^{n-2} m_1 \sum_{m_2=1}^{m_1} m_2 \right) \varphi_1(x) + ... + \\ + (-1) \frac{n!}{(n-1)!} \left(\sum_{m_1=1}^{1} m_1 \sum_{m_2=1}^{m_1} m_2 \sum_{m_3=1}^{m_2} m_3 ... \sum_{m_{n-1}=1}^{m_{n-2}} m_{n-1} \right) \varphi_{n-1}(x) = \\ = (-1)^n n! \left(\sum_{m_1=1}^{n} m_1 \right) \varphi_0(x) +$$

$$+(-1)^{n-1}n!\left(\sum_{m_1=1}^{n-1} m_1 \sum_{m_2=1}^{m_1} m_2\right)\varphi_1(x)+\ldots+$$

$$+(-1)\frac{n!}{(n-1)!}\left(\sum_{m_1=1}^{1} m_1 \sum_{m_2=1}^{m_1} m_2 \sum_{m_3=1}^{m_2} m_3 \ldots \sum_{m_{n-1}=1}^{m_{n-2}} m_{n-1}\right)\varphi_{n-1}(x), \qquad (10)$$

где введены обозначения $\varphi_k(x,n)=e^{(n-k)x} f_k(x)$.

Методом математической индукции можно показать, что $f_n^{(k)}(x)$ принимает вид

$$f_n^{(n+m)}(x)=(-1)^n n!\left(\sum_{k_1=1}^{n} k_1 \sum_{k_2=1}^{k_1} k_2 \ldots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} k_m\right)\varphi_0(x)+$$

$$+(-1)^{n-1}n!\left(\sum_{k_1=1}^{n-1} k_1 \sum_{k_2=1}^{k_1} k_2 \ldots \sum_{k_{m+1}=1}^{k_m} k_{m+1}\right)\varphi_1(x)+$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{n!}{2!}\left(\sum_{k_1=1}^{n-2} k_1 \sum_{k_2=1}^{k_1} k_2 \ldots \sum_{k_{m+2}=1}^{k_{m+1}} k_{m+2}\right)\varphi_2(x)+\ldots+$$

$$+(-1)\frac{n!}{(n-1)!}\left(\sum_{k_1=1}^{1} k_1 \sum_{k_2=1}^{k_1} k_2 \ldots \sum_{k_{m+n-2}=1}^{k_{m+n-3}} k_{m+n-2}\right)\varphi_{n-1}(x). \qquad (11)$$

Из (11) следует, что

$$f_n^{(n+m)}(0)=(-1)^n n!\left(\sum_{k_1=1}^{n} k_1 \sum_{k_2=1}^{k_1} k_2 \ldots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} k_m\right)=I_n^{n+m}. \qquad (12)$$

Для чисел Стирлинга 2-го рода получаем следующее представление:

$$S(n+m,n)=\sum_{k_1=1}^{n} k_1 \sum_{k_2=1}^{k_1} k_2 \ldots \sum_{k_m=1}^{k_{m-1}} k_m,\ m=1,2,5\ , \qquad (13)$$

сводящее их вычисление фактически к суммам вида (5). Заметим, что в доступной нам литературе [1, 2, 4–9] мы не нашли представлений чисел Стирлинга 2-го рода в виде (13).

Для сумм (4) производящие функции можно выбрать в виде

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n} e^{kx}=\frac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1}-1, \qquad (14)$$

так что

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = N_n^m = \frac{d^m F_n(x)}{dx^m}\Big|_{x=0}. \qquad (15)$$

Далее суммы (5) можно вычислять либо непосредственным вычислением производных в нуле от функций (14) или разложением этих функций в ряд Тейлора в окрестности нуля.

Приведем явные выражения для сумм (4) до (см., например, [1]) $m < 8$:

$$N_n^0=n,\ N_n^1=\frac{n(n+1)}{2},\ N_n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$N_n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},\ N_n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

$$N_n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},$$

$$N_n^6=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42},$$

$$N_n^7=\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}. \qquad (16)$$

Зная (16), можно вычислить суммы (7) и, следовательно, числа Стирлинга 2-го рода для значений $m=n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4$. Действительно,

$$I_n^{n+1}=(-1)^n n!\sum_{k=1}^{n} k=(-1)^n n!\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S(n+1,n)=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$I_n^{n+2}=(-1)^n n!\sum_{k_1=1}^{n} k_1 \sum_{k_2=1}^{k_1} k_2=(-1)^n n!\sum_{k_1=1}^{n} k_1\frac{k_1(k_1+1)}{2}=$$

$$=(-1)^n n!\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24},$$

$$S(n+2,n)=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24},$$

$$I_n^{n+3}=(-1)^n n!\sum_{k_1=1}^{n} k_1 \sum_{k_2=1}^{k_1} k_2 \sum_{k_3=1}^{k_2} k_3=$$

$$=(-1)^n n!\sum_{k_1=1}^{n} k_1\frac{k_1(k_1+1)(k_1+2)(3k_1+1)}{24}=$$

$$=(-1)^n n!\frac{n^2(n+1)^2(n+2)(n+3)}{48}, \qquad (17)$$

$$S(n+3,n)=\frac{n^2(n+1)^2(n+2)(n+3)}{48},$$

$$I_n^{n+4}=(-1)^n n!\sum_{k_1=1}^{n} k_1 \sum_{k_2=1}^{k_1} k_2 \sum_{k_3=1}^{k_2} k_3 \sum_{k_4=1}^{k_3} k_4=$$

$$=(-1)^n n!\sum_{k_1=1}^{n} k_1\frac{k_1^2(k_1+1)^2(k_1+2)(k_1+3)}{48}=$$

$$=(-1)^n n!\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(15n^3+30n^2+5n-2)}{5760},$$

$$S(n+4,n)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(15n^3+30n^2+5n-2)}{5760}.$$

Таким образом, в данной работе мы обращаем внимание на возможность представления чисел Стирлинга 2-го рода с помощью поэтапного суммирования арифметических последовательностей (см. (13)). Заметим, что проведенное исследование производных от производящих функций (6) позволяет взглянуть на часть полученных результатов с достаточно необычной точки зрения. А именно, можно сформулировать определенные рекуррентные соотношения и найти их решение для специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, пусть задан бесконечный набор функций

$$\{\varphi_k(x,\alpha)\},\ k=0,1,2,5\ , \qquad (18)$$

удовлетворяющих следующей системе дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\left\{\frac{d\varphi_k(x,\alpha)}{dx}=(\alpha-k)\varphi_k(x,\alpha)-k\varphi_{k-1}(x,\alpha),\ k=1,2,\ldots\right. \qquad (19)$$

при начальных

$$\varphi_0(0,\alpha)=1,\ \varphi_i(0,\alpha)=0,\ i=1,2,\ldots \tag{20}$$

и граничном

$$\varphi_0(x,\alpha)=e^{\alpha x} \tag{21}$$

условиях.

Решение такой задачи нам известно, и ответ дается следующими соотношениями:

$$\varphi_k(x,\alpha)=e^{(\alpha-k)x}(1-e^x)^k.$$

Литература

1. Градштейн Н.С., Рыжик Н.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., 1963.
2. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия. 1977. Т. 1.
3. Лавров П.М. Некоторые проблемы движения и излучения релятивистских электронов в электромагнитных полях: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1975.
4. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.
5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: Учеб. пособ. для вузов / Под ред. В.А. Садовничего. 3-е изд. М., 2001.
6. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ. М., 1963.
7. Холл М. Комбинаторика. М., 1970.
8. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. М., 1977.
9. Гульден Я., Джексон Д. Перечислительная комбинаторика. М., 1990.

Поступила в редакцию 21. 12. 2006