УДК 530.1; 539.12; 537.8

Е. Н. Кириллова

КВАНТОВАНИЕ БЕЗМАССОВЫХ *P*-ФОРМ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Рассматриваются модели безмассовых антисимметричных тензорных полей ранга p (p-форм) в произвольном D-мерном искривленном пространстве-времени ($p \le D$). Производится квантование этих моделей и оценивается эффективное действие. Результат записан в терминах Даламбертианов, действующих на p-формы.

Ключевые слова: *квантовые поля в искривленном пространстве-времени, антисимметричные тензорные поля, калибровочные полевые теории, эффективное действие.*

1. Введение

Безмассовые полностью антисимметричные тензорные поля (АТП, p-формы) появляются естественным образом в моделях расширенной супергравитации [1], в безмассовом спектре струн и суперструн [2], однако изучение их восходит еще к 1960-м гг. (см. ссылки и краткий обзор в статье [3], а также ссылки в упомянутых выше работах).

Большая часть работ, связанных с АТП, имеет отношение к суперсимметричным теориям (из работ последних лет упомянем, к примеру, [4–7]). В связи с этим важное значение приобретает квантование p-форм различными способами в пространстве произвольной размерности. Впервые квантование АТП (в четырехмерном пространстве-времени) было проведено авторами работ [8, 9]. При квантовании p-форм был обнаружен эффект «гостов для гостов» [8–10]. В работе [11], где производилось квантование безмассовых p-форм в четырехмерном искривленном пространстве-времени, гостовая структура теории опирается на результаты, полученные в теориях супергравитации. В нашей работе калибровочные поля появляются в ходе квантования с использованием многоступенчатой процедуры Фаддеева–Попова.

Аналогичные расчеты для массивных АТП проводились в работах [3, 12–14]. Подобные результаты могут быть использованы для изучения проблемы квантовой эквивалентности классически эквивалентных теорий, как это сделано для массивного случая в статье [12]. В работах [15, 16] и прочих работах упомянутых авторов используется другой подход к данной проблеме.

Целью данной статьи является построение схемы квантования безмассовых АТП-моделей с использованием многоступенчатой процедуры Фаддеева–Попова в произвольном D-мерном искривленном пространстве-времени и представление эффективного действия в терминах Даламбертианов, действующих на p-формы.

Статья организована следующим образом. В гл. 2 приводятся краткие сведения из теории форм и записывается классическая модель для безмассовых p-форм, $p \le D$. В гл. 3 производится квантование модели и оценивается эффективное действие. В заключении подведены итоги.

2. Модель

Рассмотрим p-форму $\overset{(p)}{B}$ в D-мерном пространстве-времени, $p \le D$:

$$\overset{(p)}{B} = \frac{1}{p!}\sum_{\mu_1\ldots\mu_p} B_{\mu_1\ldots\mu_p}(x)\, dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_p}.$$

Ее внешняя производная есть

$$d\overset{(p)}{B} = \frac{1}{(p+1)!}\sum_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}} (dB)_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}}(x)\, dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{p+1}},$$

а ко-производная δ имеет вид

$$(\delta B)_{\mu_1\ldots\mu_{p-1}} = -B_{\nu\mu_1\ldots\mu_{p-1}}{}^{;\nu}.$$

Далее, Даламбертиан $\Box_p$, действующий на формы, отличается по знаку от оператора Лапласа $\Delta = d\delta + \delta d = -\Box_p$ со свойствами $(\Delta A, B) = (A, \Delta B) = (dA, dB) = (\delta A, \delta B)$. Внутреннее произведение форм $(A,B) = (B,A)$ определяется таким образом:

$$(\overset{(p)}{A}, \overset{(p)}{B}) = \frac{1}{p!}\int d^D x\sqrt{-g(x)}A_{\mu_1\ldots\mu_p}B^{\mu_1\ldots\mu_p}.$$

Обобщая действие Максвелла на p-формы, имеем классическое действие для безмассовых p-форм [17]:

$$S^{cl}[\overset{(p)}{B}] = -\frac{1}{2}(\overset{(p+1)}{F}, \overset{(p+1)}{F}) = -\frac{1}{2}(d\overset{(p)}{B}, d\overset{(p)}{B}) =$$

$$= -\frac{1}{2(p+1)!}\int d^D x\sqrt{-g(x)}F_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}}F^{\mu_1\ldots\mu_{p+1}}, \qquad (1)$$

где $\overset{(p+1)}{F} = d\overset{(p)}{B}$ с компонентами

$$\overset{(p+1)}{F}_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}} = (d\overset{(p)}{B})_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1}(-1)^{\nu-1}\nabla_{\mu_\nu}B_{\mu_1\ldots\hat{\mu}_\nu\ldots\mu_{p+1}} =$$

$$= (p+1)(-1)^p B_{[\mu_1\ldots\mu_p;\mu_{p+1}]}$$

Действие (1) инвариантно относительно преобразований

$$\overset{(p)}{B} \to \overset{(p)}{B'} = \overset{(p)}{B} - d\overset{(p-1)}{B}, \qquad (2)$$

при этом преобразования (2) инвариантны относительно преобразований $\overset{(p-1)}{B} \to \overset{(p-1)}{B'} = \overset{(p-1)}{B} - d\overset{(p-2)}{B}$, поскольку $d^2 = 0$ и т. д., до достижения $\overset{(0)}{B}$. Будем квантовать теорию (1) с учетом преобразований типа (2) всех порядков.

3. **Квантование безмассовых *p*-форм в *D*-мерном искривленном пространстве**

Построим формальный функциональный интеграл по полям $\overset{(p)}{B}$, отвечающий классическому действию (1):

$$I[\overset{(p)}{B}] \equiv I_p = \int D\overset{(p)}{B} \exp i(S^{cl}[\overset{(p)}{B}]). \qquad (3)$$

Данный интеграл плохо определен, поскольку содержит бесконечные калибровочные объемы, связанные с инвариантностью действия (1) относительно преобразований (2), $p \le D$.

Для устранения этих бесконечностей используем многоступенчатую процедуру Фаддеева–Попова (см. [18–20]).

Выберем функцию, фиксирующую калибровку, стандартным способом:

$$\overset{(p-1)}{K} = \delta\overset{(p)}{B}. \qquad (4)$$

Здесь δ – ко-производная. Эта функция при преобразованиях (2) меняется следующим образом:

$$\overset{(p-1)}{K'} \equiv \overset{(p-1)}{K}(\overset{(p)}{B'}) = \delta\overset{(p)}{B} - \delta d\overset{(p-1)}{B}. \qquad (5)$$

Заметим, что эта функция инвариантна относительно преобразований типа (2) более низкого, чем p, порядка.

Следуя методу Фаддеева–Попова, строим детерминант Фаддеева–Попова с помощью функции (5)

$$\Delta^{-1}_{p-1} = \int D\overset{(p-1)}{B}\tilde{\delta}[\overset{(p-1)}{K'}], \qquad (6)$$

где $\tilde{\delta}[...]$ – дельта-функция, волна над значком поставлена для отличия от ко-производной δ. Включим в функциональный интеграл (3) «единицу», образованную из (6),

$$1 = \Delta_{p-1}\int D\overset{(p-1)}{B}\tilde{\delta}[\overset{(p-1)}{K'}] \qquad (7)$$

для устранения бесконечных калибровочных объемов, связанных с преобразованиями (2). (3) примет вид

$$I_p = \Delta_{p-1}\int D\overset{(p)}{B} D\overset{(p-1)}{B}\tilde{\delta}[\overset{(p-1)}{K'}]\exp i(S^{cl}[\overset{(p)}{B}]). \qquad (8)$$

Произведем в (8) преобразования, обратные к (2): $\overset{(p)}{B'} \to \overset{(p)}{B}$, при этом инвариантное относительно этих преобразований классическое действие (1) не изменится, а $\overset{(p-1)}{K'} \to \overset{(p-1)}{K}$, после чего подынтегральное выражение в (8) больше не зависит от параметра $\overset{(p-1)}{B}$, и $\int D\overset{(p-1)}{B}$ представляет собой мультипликативную расходимость, которую можно устранить, переопределив I_p:

$$I_p = \Delta_{p-1}\int D\overset{(p)}{B}\tilde{\delta}[\overset{(p-1)}{K}]\exp i(S^{cl}[\overset{(p)}{B}]). \qquad (9)$$

Оценить I_p на данном этапе пока что невозможно по двум причинам:

1) Δ_{p-1} (6) содержит бесконечные калибровочные объемы, связанные с инвариантностью преобразованной калибровочной функции (5) относительно преобразований вида (2) порядка (p – 1) и ниже;

2) обобщенная дельта-функция $\tilde{\delta}[\overset{(p-1)}{K}]$ от калибровочной функции $\overset{(p-1)}{K}$ плохо определена ввиду того, что не все компоненты $\overset{(p-1)}{K}$ или $\overset{(p-1)}{K'}$ ненулевые (см. (4) и (5)): $\delta\overset{(p-1)}{K'} = \delta^2\overset{(p)}{B} - \delta^2 d\overset{(p-1)}{B} = 0$, поскольку $\delta^2 = 0$.

Рассмотрим первый пункт подробнее. Для исключения расходимостей из Δ_{p-1}, связанных с преобразованиями (13) порядка (p – 1), в (6) следует включить «единицу», образованную с помощью следующей калибровочной функции, $\overset{(p-2)}{K} = \delta\overset{(p-1)}{B}$. Соответствующий детерминант Фаддеева–Попова есть

$$\Delta^{-1}_{p-2} = \int D\overset{(p-2)}{B}\tilde{\delta}[\overset{(p-2)}{K'}], \qquad (10)$$

и $1 = \Delta_{p-2}\int D\overset{(p-2)}{B}\tilde{\delta}[\overset{(p-2)}{K'}]$, так что

$$\Delta^{-1}_{p-1} = \Delta_{p-2}\int D\overset{(p-1)}{B}\tilde{\delta}[\overset{(p-1)}{K'}]D\overset{(p-2)}{B}\tilde{\delta}[\overset{(p-2)}{K'}]. \qquad (11)$$

В свою очередь $\overset{(p-2)}{K'}$ инвариантно относительно преобразований вида (2) порядка (p – 2): $\overset{(p-2)}{B} \to \overset{(p-2)}{B'} = \overset{(p-2)}{B} - d\overset{(p-3)}{B}$, и соответствующие расходимости в (10) должны быть устранены. Этот процесс продолжается до достижения Δ_0, построенного с помощью калибровочной функции $\overset{(0)}{K} = \delta\overset{(1)}{B}$, преобразованная функция есть $\overset{(0)}{K'} = \delta\overset{(1)}{B} - \delta d\overset{(0)}{B}$, а

$$\Delta_0^{-1} = \int D\overset{(0)}{B}\tilde{\delta}[\delta\overset{(1)}{B} - \delta d\overset{(0)}{B}] = \int D\overset{(0)}{B}\tilde{\delta}[\delta\overset{(1)}{B} - \Box\overset{(0)}{B}] = Det^{-1}\Box_0,$$

$$\Delta_0 = Det\Box_0. \qquad (12)$$

Для устранения расходимостей, связанных с калибровочными преобразованиями вида (2) порядков от 1 до p, надо вычислить последовательно все детерминанты Фаддеева–Попова с Δ_0 до Δ_{p-1} по принципу (11). Так, Δ_1 будет вычисляться следующим образом:

$$\Delta_1^{-1} = \Delta_0 \int D\overset{(1)}{B}\,\tilde{\delta}[\overset{(1)}{K'}]\,D\overset{(0)}{B}\,\tilde{\delta}[\overset{(0)}{K'}]. \qquad (13)$$

Преобразуем $\overset{(1)}{B'} \to \overset{(1)}{B}$, тогда $\overset{(0)}{K'} \to \overset{(0)}{K}$, а $\overset{(1)}{K'}$ не меняется, поэтому зависимость от $\overset{(0)}{B}$ в подынтегральном выражении исчезает, и бесконечный объем $\int D\overset{(0)}{B}$ можно устранить, переопределив интеграл:

$$\Delta_1^{-1} = \Delta_0 \int D\overset{(1)}{B}\,\tilde{\delta}[\overset{(1)}{K'}]\,\tilde{\delta}[\overset{(0)}{K}]. \qquad (14)$$

Подобным образом будем поступать при вычислении детерминантов Фаддеева–Попова любого порядка, так что вместо (11) будем иметь

$$\Delta_{p-1}^{-1} = \Delta_{p-2} \int D\overset{(p-1)}{B}\,\tilde{\delta}[\overset{(p-1)}{K'}]\,\tilde{\delta}[\overset{(p-2)}{K}]. \qquad (15)$$

Однако выражение (15) не является хорошо определенным при $(p-2) > 0$ из-за плохо определенных $\tilde{\delta}\overset{(p-1)}{K'}$ и $\tilde{\delta}\overset{(p-2)}{K}$, поскольку $\delta\overset{(p-1)}{K'} = \delta^2\overset{(p)}{B} - \delta^2 d\overset{(p-1)}{B} = 0$ ввиду свойства ко-производной $\delta^2 = 0$. То же справедливо и для $\tilde{\delta}\overset{(p-2)}{K}$. Другими словами, у $\overset{(p-1)}{K'}$ или $\overset{(p-1)}{K}$ порядка выше нулевого не все компоненты являются ненулевыми. Если, к примеру, взять дивергенцию вектора $\nabla^i A_i$, то $\delta^D[\nabla^i A_i] = \delta[\nabla^1 A_1]...\delta[\nabla^p A_p] = 0$ всегда, если у A_i отсутствует одна из компонент.

Нужно иначе определить дельта-функцию, исключив нулевые компоненты аргумента, обобщая метод, представленный в работе [19]. Обозначим новую обобщенную дельта-функцию $\delta[K]$. Поскольку принципиальным в K является то, что это ко-производная от какой-то формы, то вместо K здесь так и будем писать δV. (Заметим, что $\tilde{\delta}[\overset{(0)}{K'}] = \tilde{\delta}[\delta\overset{(1)}{B'}] = \tilde{\delta}[\delta\overset{(1)}{B} - \Box\overset{(0)}{B}] = \hat{\delta}[\delta\overset{(1)}{B} - \Box\overset{(0)}{B}]$ хорошо определена, у нее только одна компонента, ненулевая.)

Рассмотрим представленную в виде интеграла Фурье дельта-функцию

$$\tilde{\delta}[\overset{(1)}{K_V}] = \int D\overset{(1)}{V} \exp i(\overset{(1)}{V}, \overset{(1)}{K_V}). \qquad (16)$$

Для исключения бесконечных объемов, следуя методу Фаддеева–Попова, включим в (16) «единицу» $1 = \Delta_0 \int D\overset{(0)}{V}\,\tilde{\delta}[\overset{(0)}{K'_V}]$, как и при записи Δ_1^{-1}, по той причине, что бесконечные объемы в (16) возникают из-за калибровочной инвариантности типа (2)

$$\overset{(1)}{V} \to \overset{(1)}{V'} = \overset{(1)}{V} - d\overset{(0)}{V}, \qquad (17)$$

поскольку в скалярном произведении $(\overset{(1)}{V}, \overset{(1)}{K_V}) = (\overset{(1)}{V}, \delta\overset{(2)}{V}) = (d\overset{(1)}{V}, \overset{(2)}{V})$ из (16) преобразование (17) дает

$$(d\overset{(1)}{V'}, \overset{(2)}{V}) = (d\overset{(1)}{V} - d^2\overset{(0)}{V}, \overset{(2)}{V}) = (d\overset{(1)}{V}, \overset{(2)}{V}) = (\overset{(1)}{V}, \delta\overset{(2)}{V}) = (\overset{(1)}{V}, \overset{(1)}{K_V}),$$

т. е. (17) не меняет подынтегральное выражение (16). Итак,

$$\hat{\delta}[\overset{(1)}{K'}] = \hat{\delta}[\delta\overset{(2)}{V'}] = \Delta_0 \int D\overset{(1)}{V} \exp i(\overset{(1)}{V}, \overset{(1)}{K'_V}) D\overset{(0)}{V}\,\tilde{\delta}[\overset{(0)}{K'_V}]. \qquad (18)$$

Произведем в (18) обратное к (17) преобразование $\overset{(1)}{V'} \to \overset{(1)}{V}$, тогда $\overset{(0)}{K'_V} \to \overset{(0)}{K_V} = \delta\overset{(1)}{V}$, а $\overset{(1)}{K'_V}$ не меняется. Теперь от переменной $\overset{(1)}{V}$ больше ничего в подынтегральном выражении (18) не зависит. Бесконечный объем $D\overset{(0)}{V}$ устраняем, переопределив $\hat{\delta}[\overset{(1)}{K'}]$:

$$\hat{\delta}[\overset{(1)}{K'}] = \hat{\delta}[\delta\overset{(2)}{V'}] = \Delta_0 \int D\overset{(1)}{V} \exp i(\overset{(1)}{V}, \overset{(1)}{K'_V})\,\hat{\delta}[\overset{(0)}{K_V}]. \qquad (19)$$

Для преобразования выражения вида (19) запишем его в форме

$$\hat{\delta}[\delta\overset{(2)}{V}] = \Delta_0 \int D\overset{(1)}{V} \exp i(\overset{(1)}{V}, \delta\overset{(2)}{V})\,\hat{\delta}[\delta\overset{(1)}{V}], \qquad (20)$$

где

$$\hat{\delta}[\delta\overset{(1)}{V}] = \tilde{\delta}[\delta\overset{(1)}{V}] = \int D\overset{(0)}{V} \exp i(\overset{(0)}{V}, \delta\overset{(1)}{V}) \qquad (21)$$

– обычная обобщенная дельта-функция. Преобразуем (20) с учетом (21):

$$\hat{\delta}[\delta\overset{(2)}{V}] = \Delta_0 \int D\overset{(1)}{V} \exp i(\overset{(1)}{V}, \delta\overset{(2)}{V}) D\overset{(0)}{V} \exp i(\overset{(0)}{V}, \delta\overset{(1)}{V}).$$

Учитывая, что $(\overset{(0)}{V}, \delta\overset{(1)}{V}) = (d\overset{(0)}{V}, \overset{(1)}{V})$, запишем

$$\hat{\delta}[\delta\overset{(2)}{V}] = \Delta_0 \int D\overset{(1)}{V} D\overset{(0)}{V} \exp i(\overset{(1)}{V}, \delta\overset{(2)}{V} + d\overset{(0)}{V}) =$$

$$= \Delta_0 \int D\overset{(0)}{V}\,\tilde{\delta}[\delta\overset{(2)}{V} + d\overset{(0)}{V}].$$

Здесь $\tilde{\delta}[...]$ – обычная обобщенная дельта-функция. Итак,

$$\hat{\delta}[\delta\overset{(2)}{V}] = \Delta_0 \int D\overset{(1)}{V} \exp i(\overset{(1)}{V}, \delta\overset{(2)}{V})\,\hat{\delta}[\delta\overset{(1)}{V}] =$$

$$= \Delta_0 \int D\overset{(0)}{V}\,\tilde{\delta}[\delta\overset{(2)}{V} + d\overset{(0)}{V}], \qquad (22)$$

и $\hat{\delta}[\overset{(1)}{K'}]$ (19) можно представить в виде

$$\hat{\delta}[\overset{(1)}{K'}] = \Delta_0 \int D\overset{(0)}{V}\,\tilde{\delta}[\overset{(1)}{K'_V} + d\overset{(0)}{V}].$$

Теперь, имея хорошо определенную дельта-функцию от $\overset{(1)}{K'}$ – $\hat{\delta}[\overset{(1)}{K'}]$ (19), можем вычислить детерминант Фаддеева–Попова первого порядка (14):

$$\Delta_1^{-1} = \Delta_0 \int D\overset{(1)}{B}\,\hat{\delta}[\overset{(1)}{K'}]\,\hat{\delta}[\overset{(0)}{K}] =$$

$$= \Delta_0^2 \int D\overset{(1)}{V} D\overset{(1)}{B} \exp i(\overset{(1)}{V}, \overset{(1)}{K'_B}) \hat\delta[\delta \overset{(1)}{V}] \hat\delta[\delta \overset{(1)}{B}] =$$

$$= \Delta_0^2 \int D\overset{(1)}{V} D\overset{(1)}{B} \exp i(\overset{(1)}{V}, \overset{(1)}{K'_B}) \tilde\delta[\delta \overset{(1)}{V}] \tilde\delta[\delta \overset{(1)}{B}]. \qquad (23)$$

Добавим в аргументы $\tilde\delta$-функций в (23) произвольные параметры $-\overset{(0)}{\rho}$ и $-\overset{(0)}{\gamma}$ и проинтегрируем по ним с весом $\exp[-i(\overset{(0)}{\rho},\overset{(0)}{\gamma})]$, получим

$$\Delta_1^{-1} = \Delta_0^2 \int D\overset{(1)}{V} D\overset{(1)}{B} \exp i(\overset{(1)}{V},\overset{(1)}{K'_B}) \exp[-i(\delta\overset{(1)}{V},\delta\overset{(1)}{B})] =$$

$$= \Delta_0^2 \int D\overset{(1)}{B}[D\overset{(1)}{V}\exp i(\overset{(1)}{V},\delta\overset{(2)}{B} - \delta d\overset{(1)}{B} - d\delta\overset{(1)}{B})] =$$

$$= \Delta_0^2\int D\overset{(1)}{B}\tilde\delta[\delta\overset{(2)}{B} - \Box\overset{(1)}{B}] = \Delta_0^2 Det^{-1}\Box_1,$$

$$\Delta_1 = \Delta_0^{-2} Det\Box_1 = Det^{-2}\Box_0 Det\Box_1. \qquad (24)$$

С помощью (24) образуем «единицу» $1 = \Delta_1\int D\overset{(1)}{B}\hat\delta[\overset{(1)}{K'}] = \Delta_1\int D\overset{(1)}{B}\hat\delta[\delta\overset{(2)}{B'}]$ для исключения калибровочных расходимостей из Δ_1 и из $\hat\delta[\overset{(2)}{K'_B}]$:

$$\Delta_2^{-1} = \Delta_1\int D\overset{(2)}{B}\hat\delta[\overset{(2)}{K'}]\hat\delta[\overset{(1)}{K}]. \qquad (25)$$

Вместо обычных обобщенных дельта-функций в (25) стоят модифицированные, из которых исключены расходимости. А $\hat\delta[\overset{(2)}{K'_B}] = \hat\delta[\delta\overset{(2)}{B'}] = \hat\delta[\delta\overset{(3)}{B} - \delta d\overset{(2)}{B}]$ рассмотрим по образцу $\hat\delta[\overset{(1)}{K'}]$ (19) и с учетом выражения для $\hat\delta[\overset{(1)}{K}]$ (20):

$$\hat\delta[\overset{(2)}{K'_V}] = \hat\delta[\delta\overset{(3)}{V'}] = \hat\delta[\delta\overset{(3)}{V} - \delta d\overset{(2)}{V}] =$$

$$= \Delta_1\int D\overset{(2)}{V}\exp i(\overset{(2)}{V},\overset{(2)}{K'_V})\hat\delta[\overset{(1)}{K_V}] =$$

$$= \Delta_0\Delta_1\int D\overset{(2)}{V} D\overset{(1)}{V}\exp i(\overset{(2)}{V},\overset{(2)}{K'_V})\exp i(\overset{(1)}{V},\overset{(1)}{K_V})\hat\delta[\overset{(0)}{K_V}].$$

Используем выражения для $\hat\delta[\overset{(0)}{K}]$ (21):

$$\hat\delta[\overset{(2)}{K'_V}] = \Delta_0\Delta_1\int D\overset{(2)}{V}D\overset{(1)}{V}\exp i(\overset{(2)}{V},\overset{(2)}{K'_V})\exp i(\overset{(1)}{V},\delta\overset{(2)}{V})\hat\delta[\delta\overset{(1)}{V}] =$$

$$= \Delta_0\Delta_1\int D\overset{(1)}{V}[D\overset{(2)}{V}\exp i(\overset{(2)}{V},\overset{(2)}{K'_V} + d\overset{(1)}{V})]\hat\delta[\delta\overset{(1)}{V}] =$$

$$= \Delta_0\Delta_1\int D\overset{(1)}{V}\tilde\delta[\overset{(2)}{K'_V} + d\overset{(1)}{V}]\tilde\delta[\delta\overset{(1)}{V}].$$

Таким образом,

$$\hat\delta[\overset{(2)}{K'_V}] = \hat\delta[\delta\overset{(3)}{V'}] = \Delta_1\int D\overset{(2)}{V}\exp i(\overset{(2)}{V},\overset{(2)}{K'_V})\hat\delta[\overset{(1)}{K_V}] =$$

$$= \Delta_0\Delta_1\int D\overset{(1)}{V}\tilde\delta[\overset{(2)}{K'_V}+d\overset{(1)}{V}]\tilde\delta[\delta\overset{(1)}{V}]. \qquad (26)$$

Можно переписать (26), подобно (22), через *V*:

$$\hat\delta[\delta\overset{(3)}{V}] = \Delta_1\int D\overset{(2)}{V}\exp i(\overset{(2)}{V},\delta\overset{(3)}{V})\hat\delta[\delta\overset{(2)}{V}] =$$

$$= \Delta_0\Delta_1\int D\overset{(1)}{V}\tilde\delta[\delta\overset{(3)}{V} + d\overset{(1)}{V}]\tilde\delta[\delta\overset{(1)}{V}]. \qquad (27)$$

Теперь используем (26) и (22) при учете (4) в вычислении (25):

$$\Delta_2^{-1} = \Delta_1\int D\overset{(2)}{B}\hat\delta[\overset{(2)}{K'}]\hat\delta[\overset{(1)}{K}] =$$

$$= \Delta_1^2\int D\overset{(2)}{B}D\overset{(2)}{V}\exp i(\overset{(2)}{V},\overset{(2)}{K'_V})\hat\delta[\overset{(1)}{K_B}]\hat\delta[\overset{(1)}{K_V}] =$$

$$= \Delta_0^2\Delta_1^2\int D\overset{(2)}{B}D\overset{(2)}{V}D\overset{(0)}{B}D\overset{(0)}{V}\exp i(\overset{(2)}{V},\overset{(2)}{K'_V})\tilde\delta[\overset{(2)}{V}+d\overset{(0)}{V}]\tilde\delta[\delta\overset{(2)}{B}+d\overset{(0)}{B}].$$

Добавим здесь в аргументы $\tilde\delta$-функций, как в Δ_1^{-1} (23), произвольные параметры $-\overset{(1)}{\rho}$ и $-\overset{(1)}{\gamma}$ и проинтегрируем по ним с весом $\exp[-i(\overset{(1)}{\rho},\overset{(1)}{\gamma})]$, получим

$$\Delta_2^{-1} = (\Delta_0\Delta_1)^2\int D\overset{(2)}{B}D\overset{(2)}{V}D\overset{(0)}{B}D\overset{(0)}{V}\exp i(\overset{(2)}{V},\overset{(2)}{K'_V})\times$$

$$\times\exp[-i(\delta\overset{(2)}{V}+d\overset{(0)}{V},\delta\overset{(2)}{B}+d\overset{(0)}{B})]. \qquad (28)$$

Учтем в выражении (28), что

$$(\delta\overset{(2)}{V}+d\overset{(0)}{V},\delta\overset{(2)}{B}+d\overset{(0)}{B}) = (\delta\overset{(2)}{V},\delta\overset{(2)}{B}) + (d\overset{(0)}{V}+d\overset{(0)}{B}) =$$

$= (\overset{(2)}{V}+d\delta\overset{(2)}{B}) + (\overset{(0)}{V},\Box\overset{(0)}{B})$, тогда

$$\Delta_2^{-1} = (\Delta_0\Delta_1)^2\int D\overset{(2)}{B}D\overset{(2)}{V}D\overset{(0)}{B}D\overset{(0)}{V}\times$$

$\times\exp i(\overset{(2)}{V},\overset{(2)}{K'_V} - d\delta\overset{(2)}{B})\exp[-i(\overset{(0)}{V},\Box\overset{(0)}{B})]$, а

$$\int D\overset{(0)}{B}D\overset{(0)}{V}\exp[-i(\overset{(0)}{V},\Box\overset{(0)}{B})] = \int D\overset{(0)}{B}\tilde\delta[-\Box\overset{(0)}{B}] = Det^{-1}\Box_0.$$

Теперь (28) принимает вид

$$\Delta_2^{-1} = (\Delta_0\Delta_1)^2 Det^{-1}\Box_0\int D\overset{(2)}{B}D\overset{(2)}{V}\exp i(\overset{(2)}{V},\overset{(2)}{K'_V}-d\delta\overset{(2)}{B}) =$$

$$= (\Delta_0\Delta_1)^2 Det^{-1}\Box_0\int D\overset{(2)}{B}\tilde\delta[\delta\overset{(3)}{B} - \delta d\overset{(2)}{B} - d\delta\overset{(2)}{B}) =$$

$$= (\Delta_0\Delta_1)^2 Det^{-1}\Box_0 Det^{-1}\Box_2.$$

Принимая во внимание выражения (12) и (24) для Δ_0 и Δ_1, запишем

$$\Delta_2 = Det^3\Box_0 Det^{-2}\Box_1 Det\Box_2. \qquad (29)$$

Для вычисления Δ_3 образуем «единицу» $1 = \Delta_2\int D\overset{(2)}{B}\hat\delta[\overset{(2)}{K'_B}]$ и запишем Δ_3 по образцу (25):

$$\Delta_3^{-1} = \Delta_2\int D\overset{(3)}{B}\hat\delta[\overset{(3)}{K'_B}]\hat\delta[\overset{(2)}{K_B}]. \qquad (30)$$

Выражение (30) требует знания $\hat\delta[\delta\overset{(4)}{V}]$:

$$\hat\delta[\delta\overset{(4)}{V}] = \Delta_2\int D\overset{(3)}{V}\exp i(\overset{(3)}{V},\delta\overset{(4)}{V})\hat\delta[\delta\overset{(3)}{V}] =$$

$$= \Delta_1\Delta_2\int D\overset{(3)}{V}D\overset{(2)}{V}\exp i(\overset{(3)}{V},\delta\overset{(4)}{V})\exp i(\overset{(2)}{V},\delta\overset{(3)}{V})\hat\delta[\delta\overset{(2)}{V}] =$$

$$= \Delta_1\Delta_2 \int D\overset{(2)}{V}\tilde\delta[\delta\overset{(4)}{V} + d\overset{(2)}{V}]\hat\delta[\delta\overset{(2)}{V}] =$$

$$= \Delta_0\Delta_1\Delta_2\int D\overset{(2)}{V} D\overset{(0)}{V}\tilde\delta[\delta\overset{(4)}{V}+d\overset{(2)}{V}]\tilde\delta[\delta\overset{(2)}{V}+d\overset{(0)}{V}],$$

таким образом,

$$\hat\delta[\delta\overset{(4)}{V}] = \Delta_2\int D\overset{(3)}{V}\exp i(\overset{(3)}{V},\delta\overset{(4)}{V})\hat\delta[\delta\overset{(3)}{V}] =$$

$$= \Delta_0\Delta_1\Delta_2\int D\overset{(0)}{V}D\overset{(2)}{V}\tilde\delta[\delta\overset{(4)}{V}+d\overset{(2)}{V}]\tilde\delta[\delta\overset{(2)}{V}+d\overset{(0)}{V}]. \qquad (31)$$

Подставим первую форму записи $\hat\delta[\overset{(3)}{K'_B}]$ (31) в (30):

$$\Delta_3^{-1} = \Delta_2^2\int D\overset{(3)}{B}D\overset{(3)}{V}\exp i(\overset{(3)}{V},\overset{(3)}{K'_B})\hat\delta[\delta\overset{(3)}{V}]\hat\delta[\delta\overset{(3)}{B}] =$$

$$=(\Delta_0\Delta_1\Delta_2)^2\int D\overset{(3)}{B}D\overset{(3)}{V}\exp i(\overset{(3)}{V},\overset{(3)}{K'_B})D\overset{(1)}{B}D\overset{(1)}{V}\tilde\delta[\delta\overset{(3)}{B}+$$

$$+d\overset{(1)}{B}]\tilde\delta[\delta\overset{(3)}{V}+d\overset{(1)}{V}]\tilde\delta[\delta\overset{(1)}{B}]\tilde\delta[\delta\overset{(1)}{V}]. \qquad (32)$$

Добавляем в аргументы первых двух $\tilde\delta$-функций в (32) произвольные параметры $-\overset{(2)}{\rho}$ и $-\overset{(2)}{\gamma}$ соответственно и интегрируем по ним с весом $\exp[-i(\overset{(2)}{\rho},\overset{(2)}{\gamma})]$, а в аргументы вторых двух $\tilde\delta$-функций $-\overset{(0)}{\rho}$ и $-\overset{(0)}{\gamma}$ и интегрируем по ним с весом $\exp[-i(\overset{(0)}{\rho},\overset{(0)}{\gamma})]$, получим

$$\Delta_3^{-1} = (\Delta_0\Delta_1\Delta_2)^2\int D\overset{(3)}{B}D\overset{(3)}{V}D\overset{(1)}{B}D\overset{(1)}{V}\exp i(\overset{(3)}{V},\overset{(3)}{K'_B})\times$$

$$\times\exp[-i(\delta\overset{(3)}{B}+d\overset{(1)}{B},\delta\overset{(3)}{V}+d\overset{(1)}{V})]\exp[-i(\delta\overset{(1)}{B},\delta\overset{(1)}{V})].$$

Здесь

$$(\delta\overset{(3)}{B}+d\overset{(1)}{B},\delta\overset{(3)}{V}+d\overset{(1)}{V}) = (\delta\overset{(3)}{B},\delta\overset{(3)}{V})+(d\overset{(1)}{B},d\overset{(1)}{V}) =$$

$$=(d\delta\overset{(3)}{B},\overset{(3)}{V})+(\delta d\overset{(1)}{B},\overset{(1)}{V})$$

и

$$\int D\overset{(1)}{B}D\overset{(1)}{V}\exp[-i(\delta\overset{(1)}{B},\delta\overset{(1)}{V})]\exp[-i(d\overset{(1)}{B},d\overset{(1)}{V})] =$$

$$=\int D\overset{(1)}{B}D\overset{(1)}{V}\exp i(\overset{(1)}{V},-d\delta\overset{(1)}{B}-\delta d\overset{(1)}{B}) = \int D\overset{(1)}{B}\tilde\delta[-\square\overset{(1)}{B}] =$$

$$= Det^{-1}\square_1. \qquad (33)$$

Используя (33) в выражении для Δ_3^{-1} (32), получаем

$$\Delta_3^{-1} = (\Delta_0\Delta_1\Delta_2)^2\int D\overset{(3)}{B}D\overset{(3)}{V}\exp i(\overset{(3)}{V},\delta\overset{(4)}{B}-\delta d\overset{(3)}{B}-d\delta\overset{(3)}{B})Det^{-1}\square_1 =$$

$$=(\Delta_0\Delta_1\Delta_2)^2 Det^{-1}\square_1\int D\overset{(3)}{B}\tilde\delta[\delta\overset{(4)}{B}-\square\overset{(3)}{B}] =$$

$$=(\Delta_0\Delta_1\Delta_2)^2 Det^{-1}\square_1 Det^{-1}\square_3$$

и при учете (12), (24) и (29) имеем

$$\Delta_3 = (\Delta_0\Delta_1\Delta_2)^{-2}Det\square_1 Det\square_3 =$$

$$= Det^{-4}\square_0 Det^3\square_1 Det^{-2}\square_2 Det^1\square_3. \qquad (34)$$

Соответствующая «единица» имеет вид $1=\Delta_3\int D\overset{(3)}{B}\hat\delta[\overset{(3)}{K'_B}]$ и подставляется в Δ_4^{-1} по образцу (25):

$$\Delta_4^{-1} = \Delta_3\int D\overset{(4)}{B}\hat\delta[\overset{(4)}{K'_B}]\hat\delta[\overset{(3)}{K_B}]. \qquad (35)$$

$\hat\delta[\overset{(4)}{K'_B}]$ в (35) дается выражением типа (31)

$$\hat\delta[\overset{(4)}{K_V}] = \hat\delta[\delta\overset{(5)}{V}] = \Delta_3\int D\overset{(4)}{V}\exp i(\overset{(4)}{V},\delta\overset{(5)}{V})\hat\delta[\delta\overset{(4)}{V}] \qquad (36)$$

(непринципиально, что (36) записано для $\overset{(p-1)}{K}$, учитывая выражение (5) для $\overset{(p-1)}{K'}$), а $\hat\delta[\overset{(3)}{K_B}]$ дается второй строкой выражения (31) (см. определение (4) для $\overset{(p-1)}{K}$). Таким образом,

$$\Delta_4^{-1} = \Delta_3^2\int D\overset{(4)}{B}D\overset{(4)}{V}\exp i(\overset{(4)}{V},\overset{(4)}{K'_B})\hat\delta[\delta\overset{(4)}{V}]\hat\delta[\delta\overset{(4)}{B}] =$$

$$=(\Delta_0\Delta_1\Delta_2\Delta_3)^2\int D\overset{(4)}{B}D\overset{(4)}{V}D\overset{(2)}{B}D\overset{(2)}{V}D\overset{(0)}{B}D\overset{(0)}{V}\times$$

$$\times\exp i(\overset{(4)}{V},\overset{(4)}{K'_B})\tilde\delta[\delta\overset{(2)}{B}+d\overset{(2)}{B}]\tilde\delta[\delta\overset{(4)}{V}+d\overset{(2)}{V}]\tilde\delta[\delta\overset{(2)}{B}+$$

$$+d\overset{(0)}{B}]\tilde\delta[\delta\overset{(2)}{V}+d\overset{(0)}{V}].$$

Проводя вычисления аналогично (32)–(34), получим

$$\Delta_4 = (\Delta_0\Delta_1\Delta_2\Delta_3)^{-2}Det\square_4 Det\square_2 Det\square_0 =$$

$$= Det^{+5}\square_0 Det^{-4}\square_1 Det^{+3}\square_2 Det^{-2}\square_3 Det^{+1}\square_4. \qquad (37)$$

Вычисляя далее описанным выше способом Δ_5^{-1}, Δ_6^{-1},... по общему рекуррентному правилу

$$\Delta_k^{-1} = \Delta_{k-1}^2\int D\overset{(k)}{B}D\overset{(k)}{V}\exp i(\overset{(k)}{V},\overset{(k)}{K'_B})\hat\delta[\delta\overset{(k)}{V}]\hat\delta[\delta\overset{(k)}{B}], \qquad (38)$$

где рекуррентная формула для хорошо определенной (модифицированной) дельта-функции специального аргумента $\hat\delta[\delta\overset{(k)}{V}]$ имеет вид

$$\hat\delta[\delta\overset{(k)}{V}] = \Delta_{k-2}\int D\overset{(k-1)}{V}\exp i(\overset{(k-1)}{V},\delta\overset{(k)}{V})\hat\delta[\delta\overset{(k-1)}{V}], \qquad (39)$$

получаем результаты, легко обобщаемые к виду

$$\Delta_k = \prod_{s=0}^{k}(Det\square_s)^{(k-s+1)\cdot(-1)^{(k-s)}}. \qquad (40)$$

Расписывая формулу (39), получаем разные выражения для четных и нечетных значений k. Для четного k

$$\hat\delta[\delta\overset{(k)}{V}] = \prod_{i=0}^{k-2}\Delta_i\cdot\int D\overset{(k-2)}{V}D\overset{(k-4)}{V}\dots D\overset{(0)}{V}\tilde\delta[\delta\overset{(k)}{V}+$$

$$+d\overset{(k-2)}{V}]\tilde\delta[\delta\overset{(k-2)}{V}+d\overset{(k-4)}{V}]\dots\tilde\delta[\delta\overset{(2)}{V}+d\overset{(0)}{V}],$$

$$\hat\delta[\delta V] = \prod_{i=0}\Delta_i\cdot\int D\overset{k-}{V}D\overset{k-}{V}\dots DV\tilde\delta[\delta\overset{k}{V}+$$

$$+d\overset{k-}{V}\,]\tilde{\delta}[\delta\overset{k-}{V}+d\overset{k-}{V}\,]...\tilde{\delta}[\delta V+dV]\tilde{\delta}[\delta V]-$$

для нечетного k. Или, в более компактном виде,

$$\hat{\delta}[\delta\overset{(k)}{V}]=\prod_{i=0}^{k-2}\Delta_i\cdot\int\prod_{s=0}^{\frac{k-2}{2}}D\overset{(2s)}{V}\tilde{\delta}[\delta\overset{(2s+2)}{V}+d\overset{(2s)}{V}]-$$

k четное, (41а)

$$\hat{\delta}[\delta\overset{(k)}{V}]=\prod_{i=0}^{k-2}\Delta_i\cdot\int\prod_{s=0}^{\frac{k-3}{2}}D\overset{(2s+1)}{V}\tilde{\delta}[\delta\overset{(2s+3)}{V}+d\overset{(2s+1)}{V}]\cdot\tilde{\delta}[\delta\overset{(1)}{V}]-$$

k нечетное. (41б)

Вернемся к вычисляемому функциональному интегралу (9), полученному из исходного формального функционального интеграла (3) включением «единицы», образованной из (6). В связи с переопределением дельта-функции его следует переписать в виде

$$I[\overset{(p)}{B}]\equiv I_p=\Delta_{p-1}\int D\overset{(p)}{B}\exp i(S^{cl}[\overset{(p)}{B}])\hat{\delta}[\overset{(p-1)}{K}]. \qquad (42)$$

Конкретизируем выражение (42), используя формулы (1) и (4):

$$I_p=\Delta_{p-1}\int D\overset{(p)}{B}\exp[-\frac{i}{2}(d\overset{(p)}{B},d\overset{(p)}{B})]\hat{\delta}[\delta\overset{(p)}{B}].$$

Далее проанализируем по отдельности четное и нечетное p. Начнем с четного.

$$I_p=\Delta\int D\overset{(p)}{B}\,D\overset{(p-2)}{B}\,D\overset{(p-2)}{B}...D\overset{(0)}{B}\exp[-\frac{i}{2}(d\overset{(p)}{B},d\overset{(p)}{B})]\times$$

$$\times\tilde{\delta}[\delta\overset{(p)}{B}+d\overset{(p-2)}{B}]\tilde{\delta}[\delta\overset{(p-2)}{B}+d\overset{(p-4)}{B}]...\tilde{\delta}[\delta\overset{(2)}{B}+d\overset{(0)}{B}] \qquad (43)$$

где множитель Δ есть

$$\Delta\equiv\prod_{i=0}^{p-1}\Delta_i=\prod_{i=0}^{p-1}\prod_{s=0}^{i}(Det\Box_s)^{(i-s+1)\cdot(-1)^{(i-s)}}. \qquad (44)$$

Рассмотрим в (43) интеграл по $D\overset{(p)}{B}$:

$$\int D\overset{(p)}{B}\,D\overset{(p-1)}{\gamma}\exp[-\frac{i}{2}(d\overset{(p)}{B},d\overset{(p)}{B})]\tilde{\delta}[\delta\overset{(p)}{B}+d\overset{(p-2)}{B}-$$

$$-\overset{(p-1)}{\gamma}]\exp[-\frac{i}{2}(\overset{(p-1)}{\gamma},\overset{(p-1)}{\gamma})].$$

Мы добавили $\overset{(p-1)}{\gamma}$ в аргумент дельта-функции: проинтегрируем по этой переменной с весом $\exp[-\frac{i}{2}(\overset{(p-1)}{\gamma},\overset{(p-1)}{\gamma})]$. Имеем

$$\int D\overset{(p)}{B}\exp\{-\frac{i}{2}[(d\overset{(p)}{B},d\overset{(p)}{B})+(\delta\overset{(p)}{B}+d\overset{(p-2)}{B},\delta\overset{(p)}{B}+d\overset{(p-2)}{B})]\}=$$

$$=Det^{-1/2}\Box_p\exp[-\frac{i}{2}(d\overset{(p-2)}{B},d\overset{(p-2)}{B})]. \qquad (45)$$

Подставим (45) в (43). Полученное выражение для I_p, освобожденное от расходимостей, есть уже производящий функционал Z_p:

$$Z_p=\Delta\,Det^{-\frac{1}{2}}\Box_p\int D\overset{(p-2)}{B}\exp[-\frac{i}{2}(d\overset{(p-2)}{B},d\overset{(p-2)}{B})]\times$$

$$\times D\overset{(p-4)}{B}...D\overset{(0)}{B}\tilde{\delta}[\delta\overset{(p-2)}{B}+d\overset{(p-4)}{B}]...\tilde{\delta}[\delta\overset{(2)}{B}+d\overset{(0)}{B}]. \qquad (46)$$

Интегрирование по $\overset{(p-2)}{B}$ дает результат типа (45); таким образом,

$$Z_p=\Delta\,Det^{-1/2}\Box_p Det^{-1/2}\Box_{p-2}...Det^{-1/2}\Box_0,$$

p четное. (47)

Расписывая подробно выражение (44), получим для четного p:

$$\Delta_{p\,\text{÷åò í}}=\left(\frac{Det\Box_0}{Det\Box_1}\right)^{-\frac{p}{2}}\left(\frac{Det\Box_2}{Det\Box_3}\right)^{-(\frac{p}{2}-1)}...\left(\frac{Det\Box_{p-2}}{Det\Box_{p-1}}\right)^{-1}. \qquad (48)$$

Подставляя (48) в (47), имеем окончательно

$$Z_p=\left(\frac{Det\Box_0}{Det\Box_1}\right)^{-\frac{p}{2}}\left(\frac{Det\Box_2}{Det\Box_3}\right)^{-(\frac{p}{2}-1)}...\left(\frac{Det\Box_{p-4}}{Det\Box_{p-3}}\right)^{-2}\left(\frac{Det\Box_{p-2}}{Det\Box_{p-1}}\right)^{-1}\times$$

$$\times(Det\Box_p)^{-\frac{1}{2}}(Det\Box_{p-2})^{-\frac{1}{2}}...(Det\Box_0)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=(Det\Box_0)^{-(\frac{p}{2}+\frac{1}{2})}(Det\Box_1)^{+\frac{p}{2}}(Det\Box_2)^{-(\frac{p}{2}-\frac{1}{2})}(Det\Box_3)^{+(\frac{p}{2}-1)}...(Det\Box_{p-4})^{-(2+\frac{1}{2})}\times$$

$$\times(Det\Box_{p-4})^{-(2+\frac{1}{2})}(Det\Box_{p-3})^{+2}(Det\Box_{p-2})^{-(1+\frac{1}{2})}(Det\Box_{p-1})^{+1}(Det\Box_p)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\prod_{k=0}^{p}(Det\Box_k)^{(-1)^{k+1}\frac{p-k+1}{2}}.$$

Таким образом,

$$Z_p=\prod_{k=0}^{p}(Det\Box_k)^{(-1)^{k+1}\frac{p-k+1}{2}},\ p\text{ четное}. \qquad (49)$$

Теперь нужно найти Z_p для нечетного p. Проводим вычисления по аналогии со случаем четного p, см. (42)–(49):

$$I_p=\Delta\int D\overset{(p)}{B}\,D\overset{(p-2)}{B}...D\overset{(1)}{B}\exp[-\frac{i}{2}(d\overset{(p)}{B},d\overset{(p)}{B})]\tilde{\delta}[\delta\overset{(p)}{B}+$$

$$+d\overset{(p-2)}{B}]\tilde{\delta}[\delta\overset{(p-2)}{B}+d\overset{(p-4)}{B}]...\times$$

$$\times\tilde{\delta}[\delta\overset{(1)}{B}]=Det^{-1/2}\Box_p Det^{-1/2}\Box_{p-2}...Det^{-1/2}\Box_1,$$

в итоге

$$Z_p=\Delta\,Det^{-1/2}\Box_p Det^{-1/2}\Box_{p-2}...Det^{-1/2}\Box_1,$$

p нечетное. (50)

Вернемся к Δ (44). Подробно расписывая формулу для нечетного p, находим суммарные степени для каждого типа функциональных детерминантов $Det^k\Box_s$, получая

$$\Delta_{p\,\text{í å÷åò}} = (Det\Box_0)^{\frac{p+1}{2}} \left(\frac{Det\Box_1}{Det\Box_2}\right)^{-(\frac{p-1}{2})} \left(\frac{Det\Box_3}{Det\Box_4}\right)^{-(\frac{p-3}{2})} \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{Det\Box_{p-2}}{Det\Box_{p-1}}\right)^{-1}. \tag{51}$$

Подставляя (51) в (50), видим, что

$$Z_p = (Det\Box_0)^{\frac{p+1}{2}} \frac{(Det\Box_1)^{-(\frac{p-1}{2})-\frac{1}{2}}}{(Det\Box_2)^{-(\frac{p-1}{2})}} \ldots \frac{(Det\Box_{p-2})^{-1-\frac{1}{2}}}{(Det\Box_{p-1})^{-1}} =$$

$$= (Det\Box_0)^{-\frac{p+1}{2}} (Det\Box_1)^{-\frac{p}{2}} (Det\Box_2)^{-\frac{p-1}{2}} \ldots (Det\Box_{p-2})^{-\frac{3}{2}} \times$$

$$\times (Det\Box_{p-1})^{+\frac{2}{2}} (Det\Box_p)^{-\frac{1}{2}} = \prod_{k=0}^{p} (Det\Box_k)^{(-1)^k \frac{p-k+1}{2}}.$$

Так что для нечетного p

$$Z_p = \prod_{k=0}^{p} (Det\Box_k)^{(-1)^k \frac{p-k+1}{2}}. \tag{52}$$

Объединим выражения (49) и (52) для четного и нечетного p:

$$Z_p = \prod_{k=0}^{p} (Det\Box_k)^{\frac{p+1-k}{2}(-1)^{p+1-k}}.$$

Найдем из производящего функционала Z_p эффективное действие согласно формуле $Z[\overset{(p)}{B}] \equiv$ $\equiv Z_p = \exp(i\Gamma[\overset{(p)}{B}])$. Соответственно, $\Gamma[\overset{(p)}{B}] \equiv \Gamma_p =$ $= -iTr \ln Z[\overset{(p)}{B}]$ и

$$\Gamma_p = -i \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+1-k} \left(\frac{p+1-k}{2}\right) \ln Det\Box_k =$$

$$= \frac{i}{2}(-1)^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (p+1-k) Tr \ln\Box_k. \tag{53}$$

В итоге

$$\Gamma_p = \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} (p+1-k) Tr \ln\Box_k, \; p \le D. \tag{54}$$

Заметим, что верхний предел суммирования в (54) увеличен на единицу по сравнению с (53), поскольку ($p = 1 - k$) при $k = p + 1$ дает нуль.

При $p = 0,1,2,3$ получаем известные выражения

$$\Gamma_0 = \frac{i}{2} Tr \ln\Box_0, \quad \Gamma_1 = -\frac{i}{2}[2Tr \ln\Box_0 - Tr \ln\Box_1],$$

$$\Gamma_2 = \frac{i}{2}[3Tr \ln\Box_0 - 2Tr \ln\Box_1 + Tr \ln\Box_2],$$

$$\Gamma_3 = -\frac{i}{2}[4Tr \ln\Box_0 - 3Tr \ln\Box_1 + 2Tr \ln\Box_2 - Tr \ln\Box_3].$$

4. Заключение

Представлено вычисление эффективного действия безмассовых p-форм в произвольном D-мерном пространстве-времени в терминах Даламбертианов, действующих на p-формы. Обобщен на D-мерный случай подход к квантованию калибровочных полей с использованием многоступенчатой процедуры квантования Фаддеева–Попова, развитый в работе [19], в частности, получено выражение для хорошо определенной (модифицированной) дельта-функции специального аргумента $\hat{\delta}[\delta \overset{(k)}{V}]$ (41) (для произвольного k), не все компоненты которого являются ненулевыми.

Данная работа позволяет дополнить аналогичные расчеты для массивных АТП [3], [12–14] и далее завершить на этой основе исследования квантовой эквивалентности массивных и безмассовых АТП-моделей в искривленном пространстве-времени произвольной размерности.

Автор признателен профессору И. Л. Бухбиндеру за формулировку направления работы.

Список литературы

1. Nieuwenhuizen P. van // Phys. Rep. 1981. Vol. 68c. P. 301.
2. Green M., Schwarz J., Witten E. Superstring Theory // Cambridge U.P., Cambridge, 1987.
3. Kirillova E. N. Gravitation and Cosmology. 2009. Vol. 15. No. 4. P. 327.
4. Ryttov T. A., Shrock R. «Comparison of Some Exact and Perturbative Results for a Supersymmetric SU(N_c) Gauge Theory», arXiv:1202.1297 [hep-th].
5. Alencar G., Landim R. R., Tahim M. O. et al. «Antisymmetric Tensor Fields in Codimension Two Brane-World», arXiv:1009.1183 [hep-th].
6. Iso S., Sugino F., Terachi H., Umetsu H. // Phys. Rev. 2005. Vol. D 72. P. 066001.
7. Caicedo M. I., Martin I., Restuccia A. // Annals Phys. 2002. Vol. 300. P. 32.
8. Townsend P. K. // Phys. Lett. 1979. Vol. B 88. P. 97.
9. Namazie M. A., Storey D. // Nucl. Phys. 1979. Vol. B 157. P. 170.
10. «Faddeev-Popov ghosts associated with the *p*-forms themselves have ghosts» ([4, 5]).
11. Folacci A. J. // Math. Phys. 1991. Vol. 32 (10). P. 2813.
12. Buchbinder I. L., Kirillova E. N., Pletnev N. G. // Phys. Rev. 2008. Vol. D 78. P. 084024.

13. Кириллова Е. Н. // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (Tomsk State Pedagogical University Bulletin). 2011. Вып. 5 (107). С. 5.
14. Kirillova E. N. // Tomsk State Pedagogical University Bulletin. 2011. Issue 8 (110). P. 24.
15. Bastianelli F., Bonezzi R., Iazeolla C. «Quantum theories of (p,q)-forms», arXiv:1202.1297 [hep-th].
16. Bastianelli F., Benincasa P., Giombi S. J. // High Energy Phys. 2005. Vol. 0504. P. 010.
17. Buchbinder I. L., Berredo-Peixoto G. de, Shapiro I. L. // Phys. Lett. 2007. Vol. B 649. P. 454.
18. Schwarz A. S. // Lett. Math. Phys. 1978. Vol. 2. P. 247.
19. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M. // Nucl. Phys. 1988. Vol. B 308. P. 162.
20. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M. Ideas and methods of supersymmetry and supergravity // IOP Publishing Ltd. Bristol and Philadelphia, 1995, 1998.

Кириллова Е. Н., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры.
Томский государственный педагогический университет.
Ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061.
E-mail: kirillovaen@tspu.edu.ru

Материал поступил в редакцию 11.05.2012.

E. N. Kirillova

QUANTIZATION OF MASSLESS *P*-FORMS IN CURVED SPACE-TIME OF ARBITRARY DIMENSIONALITY

We consider models of massless p-ranks antisymmetric tensor fields (p-forms) in arbitrary D-dimensional curved space-time ($p \leq D$). Quantization of these models has been performed. We evaluate the effective actions of these models. The result is presented in terms of d`Alembertians acting on p-forms.

Key words: *quantum fields in curved space-time, antisymmetric tensor fields, p-forms, gauge field theories, effective action.*

Tomsk State Pedagigical University.
Ul. Kievskaya, 60, Tomsk, Russia, 634061.
E-mail: kirillovaen@tspu.edu.ru