МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 512.552

К. С. Ивашкина, П. М. Лавров

ЗАМЕЧАНИЕ О ТОЖДЕСТВАХ ЯКОБИ В АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

В работе рассматриваются ассоциативные алгебры и тождества Якоби, которые естественным образом возникают в них после введения коммутатора и записываются в виде двойных коммутаторов для произвольных трех элементов алгебры. Мы показываем, что в любой ассоциативной алгебре существует тождества, которые записываются в виде простых коммутаторов для произвольных трех элементов. Из этих тождеств можно вывести тождества Якоби, однако обратное утверждение неверно. Это позволяет говорить об основных (базовых) тождествах, существующих для любой ассоциативной алгебры.

Ключевые слова: *ассоциативные алгебры, коммутатор, тождества Якоби, обобщенные тождества Якоби.*

Этой работой продолжено начатое ранее [1] обсуждение и получение некоторых новых результатов в рамках предметов алгебры и математического анализа, изучаемых в вузах.

Рассмотрим произвольную ассоциативную алгебру A с элементами $X \in A$. Пусть T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ является базисом в A так, что для любого элемента $X \in A$ существует разложение $X = x^i T_i$. Так как $T_i T_j \in A$ мы имеем:

$$T_i T_j = F_{ij}{}^k T_k, \qquad (1)$$

где $F_{ij}{}^k$ структурные константы алгебры. В терминах $F_{ij}{}^k$ ассоциативность означает выполнение следующих соотношений:

$$F_{ij}{}^m F_{mk}{}^n = F_{jk}{}^m F_{im}{}^n. \qquad (2)$$

Коммутатор $[\cdot,\cdot]$для произвольных двух элементов $X, Y \in A$ вводится по правилу

$$[X, Y] = XY - YX. \qquad (3)$$

Из (3) следует свойство линейности

$$[X, Y + Z] = [X, Y] - [X, Z] \qquad (4)$$

и правила Лейбница

$$[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z]. \qquad (5)$$

Очевидно, что коммутатор элементов базиса определяется антисимметричной частью структурных констант алгебры:

$$[T_i, T_j] = f_{ij}{}^k T_k, f_{ij}{}^k = F_{ij}{}^k - F_{ji}{}^k. \qquad (6)$$

В связи с ассоциативными алгебрами обычно обсуждаются тождества Якоби

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] \equiv 0, \qquad (7)$$

которые для антисимметричных частей структурных констант имеют вид:

$$f_{ij}{}^m f_{mk}{}^n + f_{ki}{}^m f_{mj}{}^n + f_{jk}{}^m f_{mi}{}^n \equiv 0. \qquad (8)$$

Заметим, что для любой ассоциативной алгебры A и любых $X, Y, Z \in A$ можно обнаружить следующее тождество:

$$[X, YZ] + [Z, XY] + [Y, ZX] \equiv 0. \qquad (9)$$

Мы предполагаем рассматривать это тождество как основное (базисное) тождество для ассоциативных алгебр. Основанием для этого служит факт, что из тождества (9) следует тождество Якоби. Действительно, рассматривая наряду с (9) тождество

$$[X, ZY] + [Y, XZ] + [Z, YX] \equiv 0 \qquad (10)$$

и вычитая из (9), с учетом свойства линейности получаем тождество Якоби (7). В свою очередь, вывести тождество (9) из тождества Якоби (7) не удается. В терминах структурных констант алгебра A основное тождество (9) записывается в виде следующих соотношений:

$$F_{ij}{}^m f_{mk}{}^n + F_{ki}{}^m f_{mj}{}^n + F_{jk}{}^m f_{mi}{}^n \equiv 0. \qquad (11)$$

Отметим здесь хорошо известный факт в теории ассоциативных алгебр и алгебр Ли: любая ассоциативная алгебра обладает естественной структурой алгебр Ли, если произведение элементов определить с помощью коммутатора (3). Обратное утверждение в общем случае не верно – произведение Ли (скобка Ли) не позволяет ввести ассоциативное умножение. Однако для произведения Ли (коммутатора) тождество Якоби в алгебрах Ли формально можно рассматривать в форме тождества (9).

Для произвольной ассоциативной алгебры существуют тождества

$$[X_1, X_2 X_3 \ldots X_n] + \mathrm{cycle}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \equiv 0, \quad n = 3, 4, \ldots, \qquad (12)$$

которые можно рассматривать как обобщенные тождества (9). Доказательство следует из простых замечаний, что

$$[X_1, X_2 X_3 \ldots X_n] = X_1 X_2 X_3 \ldots X_n - X_2 X_3 \ldots X_n X_1 \qquad (13)$$

и

$$X_1 X_2 X_3 \ldots X_n + \mathrm{cycle}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_2 X_3 \ldots X_n X_1 + \mathrm{cycle}(X_1, X_2, \ldots, X_n). \qquad (14)$$

Отметим еще раз, что тождество Якоби

$$[[X_1, X_2], X_3]] + [[X_3, X_1], X_2]] + [[X_2, X_3], X_1]] \equiv 0$$

следует из (12) для $n = 3$ с помощью их двойного применения

$$[X_1, X_2X_3] - [X_2, X_1X_3] + \mathrm{cycle}(X_1, X_2, X_3) \equiv 0. \qquad (15)$$

Обобщенные тождества Якоби для $n = 4$ обсуждались в работе [2] и имеют вид:

$$[[[X_1, X_2], X_3], X_4] + [[[X_2, X_1], X_4], X_3] + \\ + [[[X_3, X_4], X_1], X_2] + [[[X_4, X_3], X_2], X_1] \equiv 0. \qquad (16)$$

Это тождество может быть выведено из (12). Действительно, непосредственной проверкой можно установить тот факт, что тождество (16) можно записать через тождество (12) для $n = 4$ в виде

$$[X_1, X_2X_3X_4] - [X_2, X_1X_3X_4] + [X_4, X_3X_2X_1] - \\ - [X_4, X_3X_1X_2] + \mathrm{cycle}(X_1, X_2, X_3, X_4) \equiv 0. \qquad (17)$$

В заключение заметим, что обсуждаемые в работе основные тождества (9) и (12) не используют каких-либо специальных требований к базису: все утверждения по этим тождествам остаются справедливыми как для бесконечномерных ассоциативных алгебр, так и для алгебр, для которых базис построить нельзя.

Список литературы

1. Лавров П. М., Радченко О. В., Рудык М. А. // Вестн. Том. гос. пед. ун-та. 2007. № 6. С. 7.
2. Wever F. Math. Ann. 120 (1949) 563.

Ивашкина К. С., студент.
Томский государственный педагогический университет.
Ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061.
E-mail: ivashkina_kseniya1418@inbox.ru

Лавров П. М., заведующий кафедрой, профессор.
Томский государственный педагогический университет.
Ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061.
E-mail: lavrov@tspu.edu.ru

Материал поступил в редакцию 20.03.2013.

K. S. Ivashkina, P. M. Lavrov

REMARK ON THE JACOBI IDENTITIES IN ASSOCIATIVE ALGEBRAS

In the paper associative algebras and Jacobi identities, which appear after introduction of commutator and write down in the form of double commutators for arbitrary three elements of a given algebra, are considered. We show that in any associative algebra there exist identities, which are written in the form of single commutators for any three elements. From these identities one can derive the Jacobi identities but not the contrary. It allows us to speak of fundamental (basic) identities existing for any associative algebra.

Key words: *associative algebras, commutator, Jacobi identities, generalized Jacobi identities.*

Ivashkina K. S.
Tomsk State Pedagogical University.
Ul. Kievskaya 60, Tomsk, Russia, 634061.
E-mail: ivashkina_kseniya1418@inbox.ru

Lavrov P. M.
Tomsk State Pedagogical University.
Ul. Kievskaya 60, Tomsk, Russia, 634061.
E-mail: lavrov@tspu.edu.ru