УДК 336

Ф.Ф. Идрисов*, А.В. Эрлих**

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЕМ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ ДВУХ ФИРМ: ИГРОВОЙ ПОДХОД

*Томский государственный педагогический университет
** ЗАО «Обьнефтеремонт», г. Нижневартовск

Принятие решений предпринимателем является одним из основных моментов его деятельности, так как именно от качества решений зависит его финансовое благополучие. В настоящее время подобные задачи выделились в отдельное направление математики, именуемое как «Теория решений».

Одним из разделов этой теории является теория игр, которая начала развиваться именно из-за потребности вынесения решений в области экономики. Первая серьезная книга по теории игр так и назвалась: «Теория игр и экономическое поведение» [1]. Однако, несмотря на то что с момента ее выхода прошло более полувека, теория игр так и не стала рабочим инструментом вынесения решений, видимо, из-за сложности математического аппарата.

В настоящей работе делается попытка описать решения, принимаемые предпринимателем в условиях конкуренции на рынке товаров двух фирм, производящих однотипный товар (дуополия).

Пусть имеется две фирмы, производящие однотипный товар. Первая фирма производит его в количестве q_1, причем q_1 может находиться в пределах $[0, Q_1]$, где величина Q_1 определяется ее производственными возможностями. Вторая фирма производит, соответственно, товар в количестве q_2, причем q_2 может находиться в пределах $[0, Q_2]$.

Рассмотрим случай, когда производственные расходы фирм R пропорциональны количеству производственного товара, т.е. $R_i = c_i q_i + d_i$. Величина d_i определяет расходы фирмы, непосредственно не связанные с производством товара (административные расходы, расходы на аренду и т.д.).

Товар обеих фирм поступает на рынок, где продается по цене p. Будем считать, что эта цена зависит от общего количество товара $q = q_1 + q_2$, поступившего на рынок, т.е. $p = p(q) = p(q_1 + q_2)$. Очевидно, что $p(q)$ – монотонно убывающая функция, так как при росте предложения цена на товар падает. Тогда прибыль Π_i i-й фирмы имеет вид

$$\Pi_i = p(q+q_2)q_i - c_i q_i - d_i,\ i=1, 2. \tag{1}$$

Возникающую ситуацию можно охарактеризовать как игру двух лиц с ненулевой суммой с двумя платежными функциями $\Pi_1(q_1, q_2)$ и $\Pi_2(q_1, q_2)$, причем $0 \le q_1 \le Q_1$, $0 \le q_2 \le Q_2$. Находясь в условиях такого конкурентного взаимодействия каждый предприниматель должен принять решение о количестве q_i выпускаемого его фирмой товара.

Рассмотрим эту проблему с позиций теории игр. Здесь возможно несколько вариантов.

Некооперативный подход

В этом случае предприниматели, ведя конкурентную борьбу, выносят свои решения независимо друг от друга и не коррелируют свои действия.

Теория игр рекомендует две стратегии вынесения решения.

Максимильная стратегия

В этом случае, скажем, первый предприниматель принимает свое решение о количестве q_1 выпускаемого им товара из условия

$$\min_{\{q_2\}} \Pi_1(q_1, q_2) \Rightarrow \max_{\{q_1\}}, \tag{2}$$

т.е. из условия получения предпринимателем максимальной прибыли в наихудшей для него ситуации. Данная задача легко решается. Действительно, так как $\Pi_1(q_1, q_2) = p(q_1+q_2)q_1 - c_1 q_1 - d_1$ и $p(q)$ – монотонно убывающая функция, то минимум $\Pi_1(q_1, q_2)$ при любом объеме производства q_1 достигается при $q_2 = Q_2$. Это вполне естественно, так как с ростом q_2 цена на товар падает и наихудшая для первого предпринимателя ситуация возникает, когда конкурирующая фирма выбрасывает на рынок максимальное количество товара. Тогда уравнение (2) принимает вид $p(q_1+Q_2)q_1 - c_1 q_1 - d_1 \Rightarrow \max\limits_{q_i}$ и необходимое условие экстремума приводит к уравнению

$$p(q_1+Q_2) + q_1 p'(q_1+Q_2) = c_2. \tag{3}$$

Корень этого уравнения $q_1 = q_{10}$ и определяет решение первого предпринимателя. Прибыль его фирмы при этом будет равна

$$\Pi_{10} = p(q_{10}+Q_2)q_{10} - c_1 q_{10} - d_1. \tag{4}$$

Для удобства дальнейших выкладок введем функцию $\overline{\Pi}_i(q_1, q_2) = \Pi_i(q_1, q_2) + d_i$.

Тогда

$$\overline{\Pi}_{10} = \Pi_{10} + d_1 = P(q_{10}+Q_2)q_{10} - c_1 q_{10}. \tag{5}$$

Аналогично, для второй фирмы максиминный объем выпускаемой продукции q_{20} определяется уравнениями

$$p(Q_1+q_{20})q_{20}+q_{20}p'(Q_1+q_{20})=c_2, \qquad (6)$$

$$\overline{\Pi}_{20}=\Pi_{20}+d_2=p(Q_1+q_{20})q_{20}-c_2q_{20}. \qquad (7)$$

Стратегия угрозы

В этом случае первый предприниматель действует по принципу: как можно сильнее снизить прибыль своего конкурента, не обращая внимания на собственные убытки. Такая стратегия может применяться, когда первый предприниматель хочет «наказать» своего конкурента (например за невыполнение им каких-то договоренностей).

Очевидно, что для второго предпринимателя наихудшая ситуация возникнет, когда $q_1 = Q_1$, так как при этом упадет цена на товар. Таким образом, стратегия угрозы первого предпринимателя заключается в выпуске его фирмой максимально возможного количества товара.

Легко видеть, что при реализации этой стратегии оптимальный для второго предпринимателя объем производства определяется уравнением (6) и его прибыль – уравнением (7). Таким образом, реализуя стратегию угрозы, первый предприниматель не позволит второму получить прибыль большую, чем Π_{20}. Точка на плоскости Π_1, Π_2 с координатами (Π_{10}, Π_{20}) называется точкой status quo [2]. К этому понятию мы еще вернемся ниже.

Переговорное множество

При совместных действиях предпринимателей основой для вынесения ими решений является так называемое переговорное множество, т.к. как выбор согласованных объемов производства (q_1, q_2) сводится к выбору точки на этом множестве. Опишем процедуру построения этого множества.

Предположим, что фиксирован суммарный объем производства товаров обеих фирм, т.е. величина $q = q_1 + q_2$, тогда $q_2 = q - q_1$ и для прибылей обеих фирм Π_1 и Π_2 мы имеем

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_1&=\Pi_1+d_1=p(q)q_1-c_1q_1,\\ \overline{\Pi}_2&=\Pi_2+d_2=p(q)(q-q_1)-c_2(q-q_1).\end{aligned} \qquad (8)$$

Отсюда

$$\frac{\overline{\Pi}_1}{p(q)-c_1}=q_1, \qquad \frac{\overline{\Pi}_2}{p(q)-c_2}=q-q_1, \qquad (9)$$

и мы получаем

$$\frac{\overline{\Pi}_1}{p(q)-c_1}+\frac{\overline{\Pi}_2}{p(q)-c_2}=q, \qquad (10)$$

т.е. возможные значения $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$, соответствующие разным значениям q_1, лежащим в интервале $0 \le q_1 \le q$, образуют прямую линию.

Переговорное множество является в данном случае огибающей этого семейства прямых линий. Для построения этой огибающей прибавим к уравнению (9) еще одно уравнение [3]:

$$-p'(q)\left(\frac{\overline{\Pi}_1}{(p(q)-c_1)^2}+\frac{\overline{\Pi}_2}{(p(q)-c_2)^2}\right)=1. \qquad (11)$$

Уравнения (10) и (11) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$. Находя решение этой системы, получим уравнение переговорного множества в параметрической форме:

$$\begin{aligned}\overline{\Pi}_1&=-\frac{(qp'(q)-p(q)+c_2)(p(q)-c_1)^2}{p'(q)(c_1-c_2)},\\ \overline{\Pi}_2&=-\frac{(qp'(q)-p(q)+c_1)(p(q)-c_2)^2}{p'(q)(c_2-c_1)},\end{aligned} \qquad (12)$$

что и позволяет построить его на графике.

Чтобы представить себе вид этого множества, найдем максимальные значения $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$. Очевидно, что при фиксированном значении q максимальное значение $\overline{\Pi}_1$ получится, кода $q_1=q$, при этом $q_2=0$ и $\overline{\Pi}_2=0$. Поэтому при фиксированном значении q максимальное значение $\overline{\Pi}_1$ получаем, приравнивая нулю производную от по q:

$$p(q)+qp'(q)=c_1. \qquad (13)$$

Обозначая решение этого уравнения через $q_{1\max}$, получим, что максимальное значение $\overline{\Pi}_1$ равно

$$\overline{\Pi}_{1\max}=p(q_{1\max})q_{1\max}-c_1q_{1\max}. \qquad (14)$$

Аналогично, обозначая корень уравнения

$$p(q)+qp'(q)=c_2 \qquad (15)$$

через $q_{2\max}$, получим, что максимальное значение равно

$$\overline{\Pi}_{1\max}=p(q_{1\max})q_{1\max}-c_1q_{1\max}. \qquad (16)$$

Можно показать, что переговорное множество имеет вид, изображенный на рис. 1, и в общем случае представляет собой кривую, выпуклую вниз. Переговоры о согласованных объемах производства должны свестись к выбору точки на этом множестве. После того как эта точка ($\overline{\Pi}_1$, $\overline{\Pi}_2$) выбрана, находятся и сами объемы производства q_1 и q_2. Для этого сначала из системы (12) находится значение суммарного объема производства q, а затем из уравнений (9) находятся q_1 и $q_2 = q - q_1$.

Арбитражное решение в детерминированных стратегиях

При невозможности договориться конкурирующие предприниматели могут принимать решение в соответствии с теорией справедливого арбитража по Нэшу [2]. В соответствии с ней «спра-

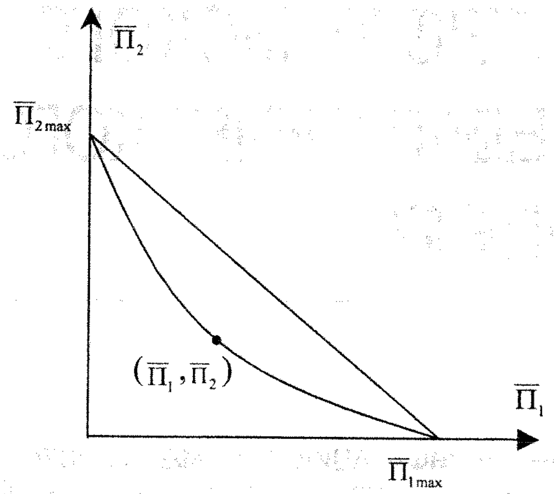

Рис. 1

ведливая» точка на переговорном множестве должна выбираться из условия

$$\left(\overline{\Pi}_1 - \overline{\Pi}_{10}\right)\left(\overline{\Pi}_2 - \overline{\Pi}_{20}\right) \Rightarrow \max_q . \qquad (17)$$

Для решения этой задачи надо в (17) вместо $\overline{\Pi}_1$ и $\overline{\Pi}_2$ подставить их явные выражения (12), вместо $\overline{\Pi}_{10}$ и $\overline{\Pi}_{20}$ – их выражения (5) и (7) и затем численно или аналитически найти q, дающее максимум выражению (17). После этого можно определить объемы производства так, как это указано выше.

Переговорное множество и арбитражное решение в смешанных стратегиях

Обратим еще раз внимание на особенность переговорного множества: оно графически выглядит в виде кривой, выпуклой **вниз**. Это позволяет улучшить результат обеих фирм, если они согласятся использовать смешанные стратегии.

Суть смешанных стратегий заключается в том, что фирмы работают по очереди: некоторую долю ρ общего времени работает только первая фирма, получая при этом доход $\overline{\Pi}_1 = \overline{\Pi}_{1\max}$, вторая фирма при этом простаивает, получая доход $\overline{\Pi}_2 = 0$. Затем оставшуюся долю $(1 - \rho)$ времени работает только вторая фирма, получая доход $\overline{\Pi}_2 = \overline{\Pi}_{2\max}$, причем на этот раз первая фирма простаивает, получая доход $\overline{\Pi}_1 = 0$. Тем самым переговорное множество дополняется отрезком прямой, соединяющей точки $\left(\overline{\Pi}_{1\max}, 0\right)$ и $\left(0, \overline{\Pi}_{2\max}\right)$, и торговля идет вокруг доли времени ρ работы первой фирмы.

Согласятся ли предприниматели на такую стратегию и договорятся ли о выборе величины доли времени ρ – сказать трудно. Польза смешанных стратегий еще плохо воспринимается предпринимательской психологией.

Но, используя теорию справедливого арбитража по Нэшу, можно найти «справедливое» значение ρ. Поскольку при этой стратегии

$$\overline{\Pi}_1 = \overline{\Pi}_{1\max}, \quad \overline{\Pi}_2 = (1-\rho)\overline{\Pi}_{2\max}, \qquad (18)$$

то нахождение ρ сводится к задаче

$$\left(\rho\overline{\Pi}_{1\max} - \overline{\Pi}_{10}\right)\left((1-\rho)\overline{\Pi}_{2\max} - \overline{\Pi}_{20}\right) \Rightarrow \max_\rho .$$

Отсюда можно получить явное значение величины ρ:

$$\rho = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\overline{\Pi}_{20}}{\overline{\Pi}_{2\max}} + \frac{\overline{\Pi}_{10}}{\overline{\Pi}_{1\max}}\right]. \qquad (19)$$

Таким образом, при этой стратегии первая фирма должна работать долю времени ρ, производя товары в количестве $q_{1\max}$ и долю времени $(1 - \rho)$ должна работать вторая фирма, производя товары в количестве $q_{2\max}$. Конкурирующая фирма в соответствующие периоды времени должна либо простаивать, либо, диверсифицируя свою деятельность, выпускать иную продукцию.

Литература

1. Neumann J. von, Morgenstern O. Theory of games and economic behaviour. Princeton, 1944 (1-st ed.) (Русский перевод: Нейманн Дж., фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., 1970.
2. Льюс Р.Д., Райра Х. Игры и решения. М., 1961.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М., 1966.