*Ф.Ф. Идрисов*, М.Н. Рустамов***

# СЕЗОННАЯ МОДЕЛЬ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

*Томский государственный педагогический университет
**Закрытое акционерное общество «Межотраслевой производственный комплекс»

## Постановка задачи

Рассмотрим предприятие, выпускающее однородную продукцию (например нефть, газ, уголь и т.п.) со скоростью $q$ единиц продукции в единицу времени. За время $dt$ оно производит $qdt$ продукции. Предположим, что по технологическим причинам предприятие не может изменить эту производительность.

Пусть в момент времени $t$ предприятие устанавливает на свою продукцию цену $p = p(t)$. Будем считать, что спрос на продукцию предприятия в единицу времени равен $\varphi(p)\lambda(t)$. Здесь $\varphi(p)$ определяет зависимость спроса от цены (заметим, что для нормального товара $\varphi'(p) < 0$), а сомножитель $\lambda(t)$ определяет сезонные колебания спроса, так что за время $dt$ предприятие продает $\varphi(p)\lambda(t)dt$ своей продукции. Для излишков продукции у предприятия имеется склад, и через $Q(t)$ мы обозначим количество товаров на складе в момент времени. Будем считать, что потери от хранения продукции на складе за время равны. Вид функции пока не уточняем. В качестве периода сезонности спроса можно взять, например, один год. Длительность этого периода обозначим через $T$, а через $S(T)$ обозначим прибыль предприятия, полученную на интервале $[0, t]$. Понятно, что эта прибыль обусловлена ценовой политикой предприятия, то есть вида $p(t)$. Необходимо решить задачу максимизации $S(T)$ по виду функции $p(t)$.

## Вывод основных уравнений

Вполне очевидно, что при сделанных предположениях

$$dQ = qdt - \varphi(p)\lambda(t)dt,$$

так что

$$\frac{dQ}{dt} = q - \varphi(p)\lambda(t). \tag{1}$$

Полагая, что $Q(0) = Q_0$, и решая это уравнение, мы получим запасы товара на складе в момент времени $t$:

$$Q(t) = Q_0 + qt - \int_0^t \varphi(p(z))\lambda(t)dz. \tag{2}$$

Для прибыли предприятия $S(T)$, полученной на интервале $dt$, верно соотношение

$$dS(t) = p(t)\varphi(p(t))\lambda(t)dt - F(Q(t))dt,$$

так что

$$\frac{dS}{dt} = p(t)\varphi(p(t))\lambda(t) - F(Q(t)). \tag{3}$$

Полагая, что $S(0) = S_0$, имеем

$$S(t) = \int_0^t [p(u)\varphi(p(u))\lambda(u) - F(Q(u))]du,$$

так что для прибыли за период сезонности $T$ можно записать:

$$S(T) = \int_0^T \left[ [p(t)\varphi(p(t))\lambda(t) - F\left( Q_0 + qt - \int_0^t \varphi(p(z))\lambda(z)dz \right) \right] dt, \tag{4}$$

и наша задача состоит в нахождении $\max S(T)$ по функции $p(t)$.

## Вывод уравнения для функции

Предположим, что предприятие осуществило вариацию цены $p(t)$, т.е. заменило $p(t)$ на $p(t) + \delta p(t)$, где $\delta p(t)$ – вариация цены. Найдем вариацию прибыли $S(T)$. Первое слагаемое в (4) имеет вид

$$S_1 = \int_0^T p(t)\varphi(p(t))\lambda(t)dt,$$

и замена $p(t)$ на $p(t) + \delta p(t)$, если $\delta p(t)$ – достаточно мало, приводит к изменению этого слагаемого на величину

$$\int_0^T [p\varphi(p)]'_p \delta p(t)\lambda(t)dt, \tag{5}$$

где штрих с индексом $p$ означает вычисление производной по аргументу $p$.

Труднее найти вариацию второго слагаемого в (4), имеющего вид

$$S_2 = -\int_0^T F\left( Q_0 + qt - \int_0^t \varphi(p(z))\lambda(z)dz \right) dt. \tag{6}$$

Замена $p(z)$ на $p(z) + \delta p(z)$ приведет к изменению внутреннего интеграла на величину

$$\int_0^t \varphi'(p)\lambda(z)\delta p(z)dz, \tag{7}$$

и величина $S_2$ изменится на величину

$$\delta S_2 = \int_0^T \left[ F'\left( Q_0 + qt - \int_0^t \varphi(p(z))\lambda(z)dz \right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^t \varphi'(p(u))(\lambda(u)\delta p(u)du \right] dt, \tag{8}$$

где, в целях большей ясности, в выражении (7) переменная интегрирования $z$ заменена на $u$.

А так как

$$\int_0^T dt \int_0^t du = \int_0^T du \int_u^t dt,$$

то

$$\delta S_2 = \int_0^T \varphi'(p(u))\lambda(u)\delta p(u)du \times$$

$$\times \int_u^T F'\left(Q_0 + qt - \int_0^t \varphi(p(z))\lambda(z)dz\right)dt.$$

И теперь, обозначив $u$ через $t$ и $t$ через $u$, получим

$$\delta S_2 = \int_0^T \varphi'(p(t))\lambda(t)\delta p(t)dt \times$$

$$\times\left[\int_t^T F'\left(Q_0 + qu - \int_0^u \varphi(p(z))\lambda(z)dz\right)du\right]. \quad (9)$$

Сводя вместе (5) и (9), получим

$$\delta S(T) = \int_0^T \left\{[p\varphi(p)]' + \varphi'(p(t)) \times\right.$$

$$\left.\times \int_t^T F'\left(Q_0 + qu - \int_0^u \varphi(p(z))\lambda(z)dz\right)du\right\}\lambda(t)\delta p(t)dt.$$

Необходимым условием экстремума $S(T)$ является условие $\delta S(T) = 0$ при произвольных вариациях $\delta p(t)$. Согласно основной лемме вариационного исчисления следует, что для оптимального вида $p(t)$ должно выполняться условие

$$[p\varphi(p)]'_p + \int_t^T F'\left(Q_0 + qu - \int_0^u \varphi(p(z))\lambda(z)dz\right)du = 0$$

или, в явном виде,

$$p(t) + \frac{\varphi(p(t))}{\varphi'(p(t))} =$$

$$= -\int_t^T F'\left(Q_0 + qu - \int_0^u \varphi(p(z))\lambda(z)dz\right)du, \quad (10)$$

которое и задает уравнение для определения вида $p(t)$.

Уравнение (10) является достаточно сложным интегральным уравнением, и его решение, очевидно, возможно лишь при конкретизации вида $\varphi(p)$ и $F(Q)$.

Заметим, что, дифференцируя (10) по $t$, его можно несколько упростить:

$$p'(t)\left[1 - \frac{\varphi(p)\varphi''(p)}{(\varphi'(p))^2}\right] =$$

$$= F'\left(Q_0 + qu - \int_0^t \varphi(p(z))\lambda(z)dz\right). \quad (11)$$

Как видим, интеграл остается лишь в аргументе у $F'(\cdot)$.

## Частный случай

Зададим функцию $F(Q)$ в виде

$F(Q) = 1/2\, A(Q - Q_0)^2 + B,$

т.е. будем считать, что существует некоторый запас, равный $Q_0$, при котором потери от складирования минимальны. Тогда

$F'(Q) = A(Q - Q_0)$ и $F''(Q) = A$.

Далее, будем считать, что $\varphi(p) = \alpha - \beta p$.

Тогда $\varphi''(p) = 0$ и уравнение (11) имеет вид

$$p'(t) = F'\left(Q_0 + qt - \int_0^t \varphi(p(z))\lambda(z)dz\right). \quad (12)$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$p''(t) = F''\left(Q_0 + qt - \int_0^t \varphi(p(z))\lambda(z)dz\right) \times$$

$$\times [q - \varphi(p(t))\lambda(t)], \quad (13)$$

или, с учетом заданного вида функции $F(\cdot)$,

$p''(t) + A\varphi(p(t))\lambda(t) = Aq.$

Подставляя $\varphi(p)$, получим

$$p''(t) - A\beta\lambda(t)p(t) = Aq - A\alpha\lambda(t). \quad (14)$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами.

Если цена меняется медленно со временем, то можно приближенно считать, что $p''(t) = 0$. Тогда (14) примет вид

$A\beta\lambda(t)p(t) = Aq - A\alpha\lambda(t),$

откуда

$$p(t) = \alpha/\beta - Aq/\lambda(t). \quad (15)$$

Мы видим, что с увеличением $\lambda(t)$ цена должна также возрастать, а с уменьшением $\lambda(t)$ – также уменьшаться (что всегда наблюдается и в жизни). Формула (15) дает более точное выражение для этой зависимости.

В более общем случае можно предположить, что $p(t)$ меняется достаточно медленно. Тогда (11) примет вид

$$F'(Q_0 + qt - \int_0^t \varphi(p(z))\lambda(z)dz) = 0.$$

и если минимум $F(Q)$ достигается при $Q = Q_0$, то получим

$$qt = \int_0^t \varphi(p(z))\lambda(z)dz).$$

Дифференцируя по $t$, получаем $q = \varphi(p(t))\lambda(t)$, откуда и определяется зависимость цены от времени $p(t) = \varphi^{(-1)}(q/\lambda(t))$, где $\varphi^{(-1)}(\cdot)$ – функция, обратная к $\varphi(p)$. Так как $\varphi(p)$ монотонно убывает с ростом $p$, то при увеличении $\lambda(t)$, когда $q/\lambda(t)$ убывает, цена должна возрастать и при уменьшении $\lambda(t)$ также уменьшаться.