УДК 372.851

***М. Ю. Хевсокова***

# МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА В УСЛОВИЯХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Предлагается методика изучения геометрических преобразований пространства в условиях дифференцированного обучения математике в школе (дифференциация образования в данном случае – это разделение общеобразовательной школы на массовую и профильную), включающая в себя рассмотрение основных вопросов, касающихся введения понятия «преобразование», изучения его свойств, необходимости введения термина «изометрия» и изучения свойств изометрии, рассмотрения взаимосвязей между геометрическими преобразованиями, а также методика изучения композиций преобразований пространства и выделения геометрических ситуаций, приводящих к использованию преобразований пространства.

**Ключевые слова:** *геометрическое преобразование пространства, изометрия, композиция преобразований, методика решения задач с использованием геометрических преобразований пространства.*

Существует большое количество различной учебно-методической литературы, посвященной вопросам дифференциации обучения в школе. Так, проблема дифференцированного обучения подробно рассматривается в книге В. А. Гусева [1], где большое внимание уделено методическим основам дифференцированного обучения математике в школе, под которыми подразумевается учебно-воспитательный процесс, протекающий с учетом доминирующих особенностей групп учащихся. Автор выделяет четыре вида дифференциации: уровневую, профильную, поисковую и непрерывную. Также проблеме дифференцированного обучения посвящены учебно-методические работы В. Г. Болтянского, Г. Д. Глейзера, Г. И. Саранцева, Е. В. Силаева, И. М. Осмоловской и др., где особое внимание уделено определению целей современного этапа дифференциации образования, определению содержания программного материала и соответствующих учебников для различных уровней и профилей, выявлению условий реализации дифференциации обучения.

В данной статье рассматривается методика изучения геометрических преобразований пространства при дифференцированном обучении геометрии в школе в силу того, что, с одной стороны, в курсе геометрии существует тема «Геометрические преобразования пространства», которая недостаточно проработана в методическом плане, но по которой имеется различная математическая литература, а с другой стороны, на изучение этой темы массовая школа выделяет не более 6 ч в старших классах, поэтому ни о каком подробном изучении преобразований пространства в массовой школе речи не идет. Перечислим те основные направления, по которым нужно изучать эту тему в школах и классах с углубленным изучением математики и выделим те немногочисленные вопросы, которые можно отнести к массовому изучению.

I. Геометрические преобразования имеют в себе огромный потенциал. Вот что по поводу значения изучения геометрических преобразований говорит В. Г. Болтянский: «Знание свойств движений и других геометрических преобразований, умение применять их к доказательству теорем и решению задач – важный элемент математической культуры, может быть, самый важный метод (наряду с умением применять векторный аппарат и логически мыслить), который должны вынести учащиеся из школьного курса геометрии» [2, с. 110].

Важно отметить еще одну важную проблему, которая не реализуется в школьном математическом образовании. Дело в том, что функции в курсе алгебры и начал анализа и геометрические преобразования в курсе геометрии – это практически один и тот же объект, но об этом практически ничего не говорится в школе. По этому поводу писал академик А. Н. Колмогоров: «Понятие отображения (функции) является в современной математике одним из наиболее употребительных понятий. Геометрические преобразования – тоже функции. Поэтому было бы противоестественным продолжать игнорировать использование геометрических преобразований в школьном курсе геометрии, как это делалось в наших программах до сих пор» [3, с. 9]. При изучении преобразований пространства мы должны стремиться к тому, чтобы сделать изложение материала взаимосвязанным и взаимодополняющим. Здесь ограничимся определением геометрического преобразования, которым мы пользуемся.

*Определение:* Если каждой точке $A$ пространства по правилу $f$ поставить в соответствие единственную точку этого пространства $A_1$, то говорят, что задано геометрическое преобразование пространства. Точку $A_1$ называют *образом* точки $A$, а точку $A$ – *прообразом* точки $A_1$.

Здесь, безусловно, возникает масса сопутствующих вопросов. А именно говорим ли мы о преобразовании пространства или фигуры, как построить систему упражнений, формирующих понятие геометрического преобразования, как связать этот материал с курсом алгебры и начала анализа и так далее. Вместе с тем предлагаем соответствующую систему задач на введение понятия «геометрическое преобразование пространства» и разделяем соответствующие задачи на две группы: первая группа задач связана с тем, что задано соответствие точек пространства и необходимо установить, является ли оно преобразованием или нет; вторая группа задач связана с тем, что необходимо самостоятельно задать соответствие между точками пространства и доказать, что соответствие является геометрическим преобразованием.

II. В учебно-методических пособиях, касающихся геометрических преобразований, свойства преобразований излагаются в разном объеме, и методика изложения этого материала также различна. Перечислим те свойства преобразований пространства, которые являются обязательными при изучении геометрических преобразований: тожественные преобразования, обратимость преобразований и обратные преобразования, неподвижные элементы преобразования (точка, прямая и плоскость). Изучение данных свойств в полном объеме относится к школам и классам с углубленным изучением математики, при этом такое свойство преобразований, как тождественное преобразование и первое знакомство с неподвижными элементами, можно в полной мере отнести к массовому изучению в школе.

III. Большое внимание в школьной практике уделяется преобразованиям, которые сохраняют расстояния между соответствующими точками. За последние десятилетия много говорилось о соответствующей терминологии. Это происходило потому, что для указанных преобразований есть три примерно одинаковых термина: «движение», «перемещение» и «изометрия». Традиционно в математической литературе и большинстве школьных учебников используется термин «движение». Академик А. Н. Колмогоров не разделял эту точку зрения и писал: «…изометрию на физическом языке более естественно называть *перемещением*, а не движением (движение есть процесс, а перемещение – его результат)» [4, с. 3]. Однако термин «перемещение» оказался неудачным – он занят в курсе физики. В цитате А. Н. Колмогорова упоминается термин, которым и будем пользоваться – это термин «изометрия». Особое внимание уделяется вопросу взаимосвязи изометрии и равенства в силу того, что изометрия сохраняет расстояния между точками, а значит, переводит фигуру в равную фигуру.

Другой не менее важный вопрос: какие общие свойства изометрии следует рассматривать при дифференцированном обучении геометрии? Среди этих свойств при углубленном изучении, безусловно, следует рассмотреть свойство обратимости любой изометрии, а также свойства изометрии переводить прямую в прямую, переводить три точки, лежащие на одной прямой, в три точки, лежащие на одной прямой, причем точку, лежащую между двумя другими, переводить в точку, лежащую между образами двух других точек; переводить отрезок в отрезок, а луч – в луч; угол переводить в равный угол; плоскость переводить в плоскость. К массовой школе стоит отнести свойства изометрии переводить прямую в прямую, луч в луч, отрезок в равный отрезок и угол в равный угол.

IV. Большую часть учебного материала по изучению преобразований пространства занимает изучение конкретных видов преобразований. В разных учебниках число этих видов различно, определения и методика их введения бывает различной. Отметим, что программа изучения преобразований пространства должна включать в себя рассмотрение следующих преобразований: центральная симметрия, осевая симметрия, зеркальная симметрия, вращение вокруг оси, параллельный перенос. Можно рассмотреть и другие виды изометрий: скользящая симметрия, зеркальный поворот, винтовое вращение, но расширять их круг не склонна. Самым важным является в дальнейшем применение этого материала при изучении других тем курса геометрии, а для этого необходимо обратить внимание на изучение взаимосвязей между этими преобразованиями. Например, вращение вокруг оси на угол 180° может определятся как осевая симметрия пространства. Все симметрии пространства связаны между собой следующей теоремой:

*Теорема:* Если фигура имеет плоскость симметрии и в ней центр симметрии, то она имеет еще ось симметрии, проходящую через центр перпендикулярно плоскости. Справедливы следующие теоремы:

*Теорема:* Если фигура имеет ось и на ней центр симметрии, то она имеет плоскость симметрии, проходящую через центр перпендикулярно к оси.

*Теорема:* Если фигура имеет перпендикулярные ось и плоскость симметрии, то она имеет и центр симметрии в точке их пересечения.

Например, известно, что цилиндр имеет ось симметрии – ось цилиндра, середина оси симметрии является центром симметрии цилиндра. Если провести плоскость через центр симметрии перпендикулярно оси симметрии мы получим плоскость симметрии цилиндра, в которой находится бесконечное множество осей симметрии, проходящих через центр симметрии. Помимо этой плоскости симметрии цилиндр имеет бесконечное множество плоскостей симметрии, проходящих через ось симметрии. Ось цилиндра является его осью вращения, причем число вращений цилиндра вокруг своей оси симметрии бесконечно, и приводит к его самосовмещению. Можно привести много таких примеров, если рассматривать куб, сферу, конус и другие тела в пространстве.

V. Другой чрезвычайно важный вопрос связан с изучением композиций преобразований пространства, но для полного изучения вопроса практически нет учебного времени. Однако без композиции преобразований нет теории преобразований. Рассматривая известную учебно-методическую литературу, таких авторов, как В. А. Гусев, С. Т. Тхамафокова [5], С. Н. Дорофеев [6], С. Л. Певзнер [7], Я. П. Понарин [8], Е. В. Потоскуев [9], в результате изучения композиций преобразований пространства мы предлагаем следующие подходы:

1. Рассматривать композиции преобразований пространства по конкретным видам преобразований. В этой связи можно предложить два пути:

а) рассмотрение композиций одноименных преобразований пространства;

б) рассмотрение композиций разноименных преобразований пространства.

В ходе исследования был подробно рассмотрен вопрос об изучении композиций одноименных преобразований при дифференцированном обучении геометрии в средней школе. В результате была разработана система в изучении композиций преобразований и выстроена последовательность их изучения. В этой связи приводится следующая таблица.

| При массовом изучении | При углубленном изучении |
|---|---|
| $Z_O^{-1} \circ Z_O = Z_O \circ Z_O^{-1} = E$,<br>где $O$ – центр симметрии | То же самое.<br>$Z_{O_2} \circ Z_{O_2} = \Pi_{2\overline{O_1O_2}}$, где $O_1$ и $O_2$ – центры симметрии и $O_1 \neq O_2$.<br>$Z_{O_n} \circ Z_{O_{n-1}} \circ \ldots \circ Z_{O_1} = E$ (или *П*), если $n$ – четное.<br>$Z_{O_n} \circ Z_{O_{n-1}} \circ \ldots \circ Z_{O_1} = Z$, если $n$ – не четное |
| $S_l^{-1} \circ S_l = S_l \circ S_l^{-1} = E$,<br>где $l$ – ось симметрии | То же самое.<br>$S_m \circ S_l = \Pi_{2\overline{AB}}$, где $m$ и $l$ – оси симметрии, m \| l.<br>$S_m \circ S_l = R_h^{2\angle(l,m)}$, где $m$ и $l$ – оси симметрии, $m \cap l = O$, $h \perp l$, $h \perp m$, $O \in h$ |
| $S_\alpha^{-1} \circ S_\alpha = S_\alpha \circ S_\alpha^{-1} = E$,<br>где α – плоскость симметрии | То же самое.<br>$S_\beta \circ S_\alpha = \Pi_{2\overline{AB}}$, где α и β – плоскости симметрии, α \| β.<br>$S_\beta \circ S_\alpha = R_l^{2\angle\varphi}$, где α и β – плоскости симметрии, $\alpha \cap \beta = l$ и $\varphi = \angle(\alpha, \beta)$ |
| | $R_l^\beta \circ R_l^\alpha = R_l^{\alpha+\beta}$, где $l$ – ось симметрии, α и β – углы вращения. |
| $\Pi_{\vec{b}} \circ \Pi_{\vec{a}} = \Pi_{\vec{a}+\vec{b}}$,<br>где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторы переноса | То же самое. |

2. Необходимо учитывать при изучении композиций преобразований пространства – это их реальное применение при изучении теоретического материала и при решении задач. Так, анализ учебно-методических пособий показывает, что использование композиций преобразований пространства при изучении теоретического материала очень незначительно. В школьном курсе можно констатировать применение композиций преобразований пространства при изучении теоретического материала – это при изучении композиций параллельных переносов, которое, с одной стороны, является суммой двух заданных векторов, а с другой – можно рассматривать как последовательное выполнение двух параллельных переносов.

VI. Есть общая проблема – «как решать задачи», есть более частная – «как решать геометрическую задачу методом геометрических преобразований». Вопросами решения задач с использованием геометрических преобразований занимались многие математики и методисты: В. Г. Болтянский, В. А. Гусев, С. Н. Дорофеев, Я. П. Панарин, Е. В. Потоскуев, Г. И. Саранцев, А. И. Фетисов, И. Ф. Шарыгин, И. М. Яглом и др. Однако не удается найти разработанной методики решения таковых задач, которая бы подсказывала соответствующий метод и необходимость использования того или иного преобразования. Особенно сложно обстоит дело с преобразованиями пространства, потому что этот метод вообще не описан. Если даже и есть какие-нибудь положения, связанные с методикой решения таких задач, то они чаще всего идут через примеры конкретных задач. Таким образом, методика решения задач с использованием геометрических преобразований пространства является на сегодняшний день недостаточно разработанной. Подход к построению методики получен исходя из анализа учебно-методических пособий, который показал, что задачи, решаемые с использованием геометрических преобразований можно, разделить на два вида:

1) задачи, связанные с изучением свойств различных геометрических преобразований и взаимосвязей между ними;

2) задачи, в формулировки которых не входят геометрические преобразования, но которые решаются с их применением.

По первому виду существует огромное количество задач, методика решения которых нуждается в совершенствовании, но рассмотрение таковых задач не входит в рамки исследования. Нас интересует гораздо более сложная проблема – это решение различных геометрических задач методом геометрических преобразований, где метод решения задач не следует из условия задачи. При этом рассматриваются всевозможные подходы к построению такой методики и выделяются геометрические ситуации, приводящие к использованию геометрических преобразований пространства, например:

а) Известно, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии, то этот факт может использоваться в разных ситуациях, решаемых с применением центральной симметрии, например:

– если требуется доказать, что отрезок любой прямой, проходящий через точку пересечения диагоналей параллелепипеда и заключенный внутри него, делится этой точкой пополам;

– если нужно доказать, что противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны;

– если требуется доказать, что два тела, полученных при пересечении параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку пересечения его диагоналей, равны и имеют равные объемы;

– если требуется доказать, что четырехугольная призма является параллелепипедом, то нужно доказать, что точка пересечения диагоналей призмы является его центром симметрии.

б) Известно, что правильный тетраэдр имеет три оси симметрии, проходящие через середины противоположных ребер, то данный факт можно использовать в следующих ситуациях, например:

– если требуется доказать, что треугольная пирамида является тетраэдром;

– если нужно доказать, что плоскость, проходящая через отрезок, соединяющий середины противоположных ребер тетраэдра, делит его на равные два тела.

в) Если нужно доказать, что точка, лежащая в плоскости, находится на наименьшем или наибольшем расстоянии от двух других точек, не лежащих в плоскости, то можно использовать зеркальную симметрию.

г) Если требуется доказать, что в правильной треугольной пирамиде плоскость, проходящая через ребро и биссектрису треугольника в основании, делит пирамиду на два равных тела, то можно использовать зеркальную симметрию.

д) Если нужно две фигуры, лежащие в разных плоскостях, перевести в одну плоскость и провести сравнительный анализ, то целесообразно применить вращение вокруг оси.

е) Если требуется доказать, что треугольник в пространстве является правильным, то можно использовать вращение вокруг оси, проходящей через центр треугольника перпендикулярно к его плоскости.

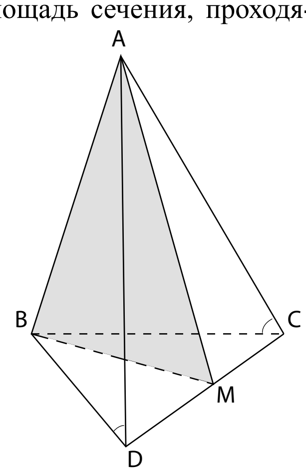
ж) Если нужно доказать, что две скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях, то можно использовать параллельный перенос, где расстоянием между скрещивающимися прямыми является длина вектора параллельного переноса.

з) Если нужно доказать, что наклонная призма равна прямой призме, построенной на сечении, перпендикулярном боковым ребрам, то целесообразно использовать параллельный перенос.

Здесь приведены более характерные, но не все возможные геометрические ситуации, приводящие к использованию геометрических преобразований пространства, в силу того, что их круг можно расширять.

Суть методики решения геометрических задач с использованием геометрических преобразований пространства состоит в следующем: анализируя текст задачи, мы как всегда совершаем аналитико-синтетическую деятельность по нахождению следствий из условия задачи и вырабатываем стратегию по решению той или иной задачи. Путь от условия задачи до момента использования геометрического преобразования может быть различным: а) можно сразу увидеть использование того или иного преобразования; б) нужно проделать дополнительную работу, чтобы увидеть использование геометрического преобразования. Приведем пример методики решения геометрической задачи с использованием геометрических преобразований пространства, при решении которой используется симметрия относительно плоскости.

*Задача:* В правильной треугольной пирамиде *ABCD* ребро *AB* перпендикулярно ребру *CD*, угол *ACB* равен углу *ADB*, площадь сечения, проходящего через ребро *AB* и середину ребра *DC*, равна *S*, *DC* = *a*. Найдите объем пирамиды *ABCD*.




*Решение:*

1. Дана *ABCD* – правильная треугольная пирамида, $AB \perp CD$, $DM = MC$, $\angle ACB = \angle ADB$, $S_{ABM} = S$, ребро $DC = a$.

2. Требуется найти $V_{ABCD}$.

3. Построив сечение *ABM,* мы видим, что оно

разбивает данную треугольную пирамиду *ABCD* на две треугольные пирамиды *ABMD* и *ABMC* (рисунок). Тогда, используя свойство объема, можно искомый объем найти через сумму объемов двух треугольных пирамид *ABMD* и *ABMC*, где $V_{ABCD} = V_{ABMC} + V_{ABMD}$.

4. Докажем, что сечение *ABM* является плоскостью симметрии пирамиды *ABCD*, а для этого необходимо доказать, что все вершины симметричны относительно плоскости *ABM*.

5. Чтобы доказать, что вершины пирамиды *C* и *D* симметричны относительно плоскости *ABM,* необходимо доказать, что ребро *CD* перпендикулярно плоскости сечения.

6. В основании правильной треугольной пирамиды *ABCD* лежит правильный треугольник *BCD*. Отрезок *BM* является медианой $\Delta BCD$ (п. 1), а значит, отрезок *BM* является высотой $\Delta BCD$.

7. Так как $AB \perp CD$, $\angle ACB = \angle ADB$ (из п. 1) и $CD \perp BM$ (п. 6), то получаем, что $CD \perp AM$ (по теореме о трех перпендикулярах).

8. Тогда отрезок *CD* перпендикулярен к пересекающимся прямым *AM* и *BM* (п. 6, 7), значит, отрезок *CD* перпендикулярен к плоскости *ABM* (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

9. Из того, что $CD \perp (ABM)$ и $CM = MD$, следует, что вершины пирамиды *C* и *D* симметричны относительно плоскости *ABM*.

10. В свою очередь точки *A* и *B* лежат в плоскости *ABM* и являются неподвижными точками при преобразовании.

11. Значит, плоскость *ABM* является плоскостью симметрии пирамиды *ABCD*, а именно при зеркальной симметрии $S_{ABM}(C) = D$, $S_{ABM}(A) = A$, $S_{ABM}(B) = B$ (п. 9, 10).

12. Так как зеркальная симметрия является изометрией, то плоскость *ABM* разбивает данную треугольную пирамиду *ABCD* на две **равные** треугольные пирамиды *ABMD* и *ABMC*, которые имеют **равные** объемы. Поэтому для нахождения объема *ABCD* достаточно найти объем одной из пирамид, на которые разбивается данная пирамида.

13. Итак, $V_{ABCD} = 2V_{DABM} = 2 =$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{ABM} \cdot MD = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S \cdot \frac{a}{2} = \frac{a \cdot S}{3} \text{ (п. 1, 12).}$$

При решении данной задачи с методической точки зрения стоит обратить внимание учащихся на два момента. Во-первых, увидеть, что объем искомого тела можно найти как сумму объемом его составляющих и, во-вторых, доказать, что плоскость *ABM* является плоскостью симметрии, и затем использовать тот факт, что зеркальная симметрия является изометрией и делит пирамиду на две равные пирамиды. Такова в данной задаче стратегия ее решения.

Объем статьи не позволяет рассмотреть все проблемы, которые поднимаются при изучении этой важной темы. Например, здесь не затронуты преобразования подобия пространства, не рассмотрены преобразования в координатах и т. д. Однако представляется, что материал этой статьи показывает важность и сложность изучения темы «Геометрические преобразования пространства» в школьном математическом образовании.

## Список литературы


1. Гусев В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: Академия, 2003. 432 с.
2. Болтянский В. Г. Поворот и центральная симметрия // Математика в школе. 1989. № 6. С. 108–119.
3. Колмогоров А. Н. Геометрия 6 класс: метод. пос. М.: Просвещение, 1970. 93 с.
4. Колмогоров А. Н. Современная математика и математика в современной школе // Математика в школе. 1971. № 6. С. 2–3.
5. Гусев В. А., Тхамафокова С. Т. Преобразование пространства: пос. для учителей. М.: Просвещение, 1979. 94 с.
6. Дорофеев С. Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах: учеб. пос. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2006. 189 с.
7. Певзнер С. Л. Движение. Подобие: учеб. пос. для студентов ФМФ. Коломенск-на-Амуре, 2001. 136 с.
8. Понарин Я. П. Элементарная геометрии. Т. 2: Стереометрия. М.: МЦНМО, 2006. 256 с.
9. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2005. 368 с.


Хевсокова М. Ю., аспирант.
**Московский педагогический государственный университет.**
Ул. Малая Пироговская, 1, г. Москва, Россия, 119991.
E-mail: viva82@mail.ru

*Материал поступил в редакцию 26.02.2010.*

***M. Yu. Khevsokova***

**METHODOLOGY OF STUDDING OF GEOMETRICAL TRANSFORMATION OF SPACE IN FRAMES OF THE DIFFERENTIATED TRAINING GEOMETRY IN HIGH SCHOOL**

The article proposes methodology of studding geometrical transformation of space in frames of the differentiated training geometry in high school (under the differentiation of the education is understood the dividing of a school to a comprehensive school and a specialized school), including consideration of the basic questions, concerning introductions of concept «transformation», studying of its properties, necessities of bringing the term «isometry» and studying of properties of an isometry, consideration of interconnections between geometrical transformations, and also a technique of studying of compositions of transformations of space and apportionment of the geometrical situations leading to use of transformations of space.

**Key words:** *geometrical transformation of space, isometry, compositions of transformations of space, methodology of the decision of problems with use of geometrical transformations of space.*

**Moscow Pedagogical State University.**
Ul. Malaya Pirogovskaya, 1, Moscow, Russia, 119991.
E-mail: viva82@mail.ru