УДК 373.1.02:372.8

Я. С. Гриншпон, А. Г. Подстригич

ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ПО МАТЕМАТИКЕ

С позиций деятельностного подхода рассматриваются методические особенности обучения школьников решению задач повышенной сложности по математике. Представлена классификация данного типа задач (задачи с параметром, задачи на делимость, задачи на десятичную запись чисел, диофантовы уравнения, задачи на нахождение наибольшего или наименьшего натурального значения, задачи на целую часть и т. д.) и поэтапная схема их решения. Приведенная совокупность примеров нестандартных задач каждого типа с полными решениями направлена на формирование у обучающихся положительной мотивации, самостоятельного мышления, действий, необходимых для успешного овладения математической деятельностью. Разработанные материалы могут использоваться как в рамках школьного курса углубленного изучения математики, так и для подготовки школьников к всероссийским олимпиадам по математике.

Ключевые слова: *задачи повышенной сложности по математике, поэтапная схема решения нестандартных задач, задачный подход к обучению, математическая деятельность.*

В основе новой методологии образования – научить учиться всю жизнь – находятся ни критерии объема и полноты конкретного знания, а его методологические функции. Знания, умения и навыки, которые долгое время были главной целью образовательного процесса, теперь становятся средством. Актуальными становятся ориентация современной отечественной школы на формирование компетентностного уровня знаний и умений обучающихся, учет их индивидуальных познавательных склонностей, признание высокого развивающего потенциала математического образования. При этом математическая деятельность как ключевой элемент всей системы математического образования реализуется в первую очередь в процессе решения содержательных задач на основе точно сформулированных правил.

«Знания не могут быть ни усвоены, ни сохранены вне действий обучаемого... Знать – это всегда выполнять какую-то деятельность или действия, связанные с данными знаниями... Качество усвоения знаний определяется многообразием и характером видов деятельности, в которых знания могут функционировать» (Н. Ф. Талызина).

Основным структурным компонентом учебно-познавательной деятельности является учебная задача. А задачный подход в настоящее время получает широкое распространение в связи с ориентацией образовательного процесса на формирование у школьников «умения учиться» [1].

«Что значит владение математикой? Это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности. Поэтому самая главная обязанность курса математики средней школы состоит в подчеркивании методической стороны процесса решения задач» (Д. Пойа).

Решение многих задач повышенной сложности по математике можно разделить на три этапа:

– интуитивное угадывание одного или нескольких решений задачи или ограничений, накладываемых на эти решения;

– творческий поиск метода нахождения всех решений задачи или доказательства того, что других решений, кроме найденных на первом этапе, не существует;

– строгое логическое оформление идей, выработанных на первом и втором этапах.

Разумеется, в отличие от задач базового уровня простой тренировкой «натаскать» на задачи повышенного уровня сложности невозможно. Однако рассмотрение большого числа примеров, иллюстрирующих различные методы, безусловно, способствует овладению навыком решения таких задач. При этом следует обратить внимание учащихся на все этапы решения, т. е. научиться угадыванию ответа (первый этап) не менее важно, чем научиться поиску верного способа решения (второй этап) и корректной записи полученного решения (третий этап).

Также важно постоянно обращать внимание школьников на то, что если на первых двух этапах допустимо и даже полезно использование не совсем строгих фраз вида «число, близкое к нулю» или «большое число», то на третьем этапе необходимо эти идеи сформулировать более точно в виде неравенств.

В качестве примеров задач, на которых удобно отрабатывать предложенную поэтапную схему решения, можно порекомендовать задачи с параметром, задачи на делимость, задачи на десятичную запись чисел, диофантовы уравнения, задачи на нахождение наибольшего или наименьшего натурального значения, задачи на целую часть и т. д.

Рассмотрим подробнее перечисленные здесь типы заданий и приведем по конкретному примеру стандартной задачи каждого типа (задачи составлены на основе источников [2–4]). Отметим, что для всех разобранных ниже задач предлагаются решения, не требующие дополнительной подготовки от учеников и знаний, выходящих за рамки школьной программы. Хотя при работе с сильными учениками и при достаточном количестве часов целесообразно рассмотреть и другие возможные решения данных задач, например с использованием понятия инвариантности уравнений и неравенств или с использованием аппарата сравнений по модулю целых чисел.

В задачах с параметром часто требуется найти все значения параметра, при которых уравнение или неравенство имеет заданное количество решений.

Задача. При каких неотрицательных значениях параметра a уравнение $x^2 - 2a\cos x + 2 = 0$ имеет единственное решение?

Решение. На первом этапе естественно определить, что при $a \neq 0$ аналитическими методами данное уравнение неразрешимо и надо пытаться применять графические соображения. Также видно, что при $a = 0$ левая часть всегда положительна и, значит, уравнение не имеет решений.

Сделанные на первом этапе наблюдения подсказывают, что на втором этапе целесообразно рассмотреть графики функций $f(x) = x^2 + 2$ и $g(x) = 2a\cos x$, а также, что, возможно, могут оказаться полезными оценки $x^2 \geq 0$ и $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Итак, осталось выполнить третий этап, т. е. записать решение, например, в таком виде. Наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 2$ равно двум и достигается при $x = 0$. Если $a < 1$, то значения функции $g(x) = 2a\cos x$ не превышают двух, и значит, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ не пересекаются. Если же $a > 1$, то из равенств $g(0) = 2a$ и $f(0) = 2$ следует, что $g(0) > f(0)$, а так как $g(\pm\pi/2) = 0$, имеем $g(\pm\pi/2) < f(\pm\pi/2)$, и значит, в силу непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$, их графики имеют, по крайней мере, две точки пересечения. Осталось рассмотреть случай $a = 1$. В этом случае при любых действительных x выполняются неравенства $f(x) \geq 2$ и $g(x) \leq 2$. Следовательно, решения исходного уравнения удовлетворяют условиям $f(x) = 2$ и $g(x) = 2$, откуда, уравнение имеет единственное решение $x = 0$.

Ответ: 1.

Задачи на делимость основаны на операции деления с остатком целых чисел: если $a = bq + r$, где все числа a, b, q, r – целые, причем $b \neq 0$, $0 \leq r < |b|$, то r называют остатком, а q – неполным частным при делении a на b. Если при этом $r = 0$, то говорят, что a делится на b без остатка. Основное свойство остатков заключается в том, что остаток от деления суммы (разности, произведения, натуральной степени) целых чисел равен остатку от деления суммы (разности, произведения, натуральной степени) остатков от деления этих чисел на некоторое фиксированное число.

Задача. Найдите наименьшее $N > 2015$ такое, что число $n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_N^4$ делится без остатка на 5 при любых целых числах $n_1, n_2, \ldots, n_N$, не делящихся на 5.

Решение. В данном случае первый этап – это вычислительный эксперимент по нахождению остатков от деления четвертых степеней целых чисел на 5. Составим таблицу:

Целое число n, не делящееся на 5	Четвертая степень n^4	Остаток при делении n^4 на 5
±1	1	1
±2	16	1
±3	81	1
±4	256	1
±6	1296	1

При составлении данной таблицы полезно вспомнить свойства остатков и тем самым облегчить себе вычисления. Действительно, так как пары чисел ±3 и ∓2, ±4 и ∓1, ±6 и ∓1 дают одинаковые остатки при делении на 5, то достаточно было заполнить первые две строки таблицы и далее заполнить последний столбец, не вычисляя четвертые степени числа n.

На втором этапе формулируем гипотезу: четвертая степень любого целого числа, не делящегося на 5, дает остаток 1 при делении на 5. Обосновываем ее с помощью основного свойства остатков.

И третий этап – это запись решения, например, в таком виде. Произвольное целое число n, не делящееся на 5, имеет один из остатков 1, 2, 3 или 4 при делении на 5. Числа $1^4 = 1$, $2^4 = 16$, $3^4 = 81$ и $4^4 = 256$ при делении на пять дают остаток один, а значит, по основному свойству остатков n^4 при делении на пять имеет остаток один. Следовательно, выражение $n_1^4 + n_2^4 + \ldots + n_N^4$ делится на пять без остатка в том и только в том случае, когда N кратно пяти. Так как $N > 2015$, то наименьшее возможное $N = 2020$.

Ответ: 2020.

В основе задач на десятичную запись чисел лежит принцип построения позиционной десятичной системы счисления, а именно, если натуральное число N записано с помощью цифр $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ (здесь цифры перечисляются слева направо), то $N = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$. Другими словами, последняя цифра числа – это остаток от деления этого числа на 10, предпоследняя цифра – это остаток от деления на 10 неполного частного из предыдущего деления и т. д.

Задача. Найдите все натуральные числа, десятичная запись которых состоит только из нечетных цифр и которые при этом являются квадратом некоторого другого натурального числа.

Решение. На первом интуитивном этапе догадываемся, что имеет смысл рассматривать только квадраты нечетных натуральных чисел, так как в противном случае последняя цифра будет четной. Далее, вычислив квадраты нескольких нечетных чисел ($1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$, $11^2 = 121$ и т. д.), легко находим два решения, 1 и 9, и замечаем, что во всех квадратах, содержащих более одной цифры, предпоследняя цифра четная.

На втором этапе формируется идея выделить в числе, возводимом в квадрат, последнюю цифру и число, составленное из всех цифр, кроме последней, т. е. записать число в виде $10b + a$, и попытаться для нечетного a доказать четность предпоследней цифры в числе $(10b + a)^2$.

На третьем этапе остается грамотно провести алгебраические преобразования и записать решение, например, следующим образом.

Представим число, квадратом которого является искомое число, в виде $10b + a$, где a – это цифра в разряде единиц. Тогда $(10b + a)^2 = 100b^2 + 20ab + a^2$. Видно, что последняя цифра числа $(10b + a)^2$ совпадает с последней цифрой числа a^2, и значит, если a четно, то и у квадрата последняя цифра будет четной, что противоречит условию задачи. С другой стороны, предпоследняя цифра числа $(10b + a)^2$ равна сумме последней цифры числа $2ab$ и предпоследней цифры числа a^2 (если a^2 состоит из одной цифры, предпоследнюю цифру будем считать равной нулю). Но последняя цифра четного числа $2ab$ всегда четна, а при нечетных a (т. е. при a, равных 1, 3, 5, 7 или 9) предпоследняя цифра числа a^2 также четна (действительно, $1^2 = 01$, $3^2 = 09$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $9^2 = 81$), а значит, их сумма тоже является четной. Таким образом, если a нечетно и число $(10b + a)^2$ содержит более одной цифры, то в разряде десятков стоит четная цифра, а такие числа не удовлетворяют условию. Следовательно, подходят только числа с нечетной последней цифрой, десятичная запись квадратов которых состоит из одной цифры, т. е. $1^2 = 1$ и $3^2 = 9$.

Ответ: 1 и 9.

Диофантовы уравнения – это уравнения, содержащие две или более неизвестных и для которых требуется найти только целые или натуральные решения. При решении диофантовых уравнений часто используются соображения делимости.

Задача. Решите в натуральных числах уравнение $n^2 + 2^n + 1 = 4m$.

Решение. На первом этапе угадывается решение $n = m = 1$ и замечается, что при других натуральных n, отличных от единицы, левая часть уравнения не делится на 4, причем при четных n остаток равен единице, а при нечетных – двум. Для наглядности можно оформить результаты первого этапа в виде следующей таблицы:

Натуральное число n	Значение выражения $n^2 + 2^n + 1$	Остаток при делении $n^2 + 2^n + 1$ на 4
1	4	0
2	9	1
3	18	2
4	33	1
5	58	2
6	101	1
7	178	2

Это наблюдение приводит на втором этапе к идее рассмотрения остатков от деления левой части уравнения на 4, причем в силу четности выражений 2^n и $4m$ достаточно рассматривать нечетные n.

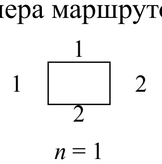
Третий этап можно оформить следующим образом. Запишем уравнение в виде $n^2 = 4m - 2^n - 1$. Так как правая часть этого уравнения нечетна, то n также нечетно, т. е. $n = 2k + 1$, где $k \geq 0$. Подставив это выражение для n в исходное уравнение, получим $4k^2 + 4k + 2 \times 4^k + 2 = 4m$, откуда видно, что при натуральных k левая часть уравнения при делении на 4 дает остаток 2, в то время как правая часть делится без остатка. Следовательно, возможен только случай $k = 0$, который приводит к решению $n = m = 1$.

Ответ: $n = m = 1$.

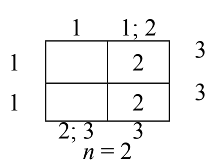
Задачи на нахождение наибольшего или наименьшего натурального значения решаются, как правило, методом оценки и примера. Число n_0 является наименьшим (наибольшим) натуральным числом, удовлетворяющим условию $P(n)$, тогда и только тогда, когда: а) для любого n, удовлетворяющего условию $P(n)$, выполняется неравенство $n \geq n_0$ ($n \leq n_0$); б) число n_0 удовлетворяет условию $P(n)$.

Задача. План города имеет вид квадрата со стороной n, расчерченного на n^2 единичных квадратиков. Нужно открыть несколько троллейбусных (двусторонних) маршрутов так, чтобы каждый маршрут имел не более одного поворота и чтобы с любого перекрестка на любой другой можно было проехать, сделав не более одной пересадки. Каким наименьшим числом маршрутов можно обойтись?

Решение. На первом этапе естественной должна быть идея рассмотрения небольших n, например, $n = 1$ и $n = 2$, при которых очевидным образом получаются ответы 2 и 3 соответственно. Для наглядности решения при $n = 1$ и $n = 2$ можно оформить в виде следующих схем, где числами обозначены номера маршрутов.



$n = 1$



$n = 2$

Далее на втором этапе формулируется гипотеза, что условию задачи будет удовлетворять схема из

$(n+1)$ маршрутов, причем маршруты можно проводить так, что номер маршрута будет совпадать с номером вертикальной улицы, по которой он проложен.

И наконец, на третьем этапе можно записать решение, например, таким образом. Так как каждый маршрут имеет не более одного поворота, то он идет не более чем по одной вертикальной и не более чем по одной горизонтальной улицам. Поэтому если допустить, что маршрутов n или менее, то найдутся горизонтальная и вертикальная улицы, по которым не проходит ни одного маршрута, и значит, по перекрестку, образуемому этими улицами, также не пройдет никакой маршрут. Следовательно, число маршрутов должно быть не менее чем $(n+1)$. Приведем пример подходящей маршрутной сети из $(n+1)$ маршрутов. Пусть k-й маршрут проходит снизу наверх по всей k-й вертикальной улице и затем слева направо по последней горизонтальной улице.

Ответ: $(n+1)$ маршрутов.

В задачах на целую часть, как правило, ключевым является наблюдение, что равенство $[x] = n$ равносильно двойному неравенству $n \le x < n+1$. При этом если два числа отличаются друг от друга на единицу или более, то целые части этих чисел различны.

Задача. Сколько различных чисел встречается среди чисел

$$\left[\frac{1^2}{1000}\right], \left[\frac{2^2}{1000}\right], \left[\frac{3^2}{1000}\right], \ldots, \left[\frac{999^2}{1000}\right], \left[\frac{1000^2}{1000}\right]?$$

Решение. На первом этапе необходимо заметить, что при не очень больших n числа

$$\frac{n^2}{1000} \text{ и } \frac{(n+1)^2}{1000}$$

очень близки друг к другу, и значит, их целые части либо равны друг другу, либо отличаются на единицу. Однако при увеличении n числа

$$\frac{n^2}{1000} \text{ и } \frac{(n+1)^2}{1000}$$

начинают более значительно отличаться друг от друга. Для иллюстрации этого факта можно провести вычислительный эксперимент, взяв несколько различных n.

Натуральное число n, не превышающее тысячу	Значение выражения $n^2/1000$	Целая часть выражения $n^2/1000$
1	0,001	0
2	0,004	0
3	0,009	0
99	9,801	9
100	10	10
101	10,201	10
499	249,001	249
500	250	250
501	251,001	251
999	998,001	998
1000	1000	1000

Итак, становится очевидным, что второй этап – этот поиск метода нахождения n, начиная с которого целые части чисел

$$\frac{n^2}{1000} \text{ и } \frac{(n+1)^2}{1000}$$

различны, а значит, надо найти n, начиная с которого разность этих чисел не менее единицы.

Третий этап может быть записан, например, следующим образом. Решим неравенство

$$\frac{(n+1)^2}{1000} - \frac{n^2}{1000} \ge 1.$$

Помножив обе части на 1000 и раскрыв скобки, получим $2n + 1 \ge 1000$, откуда, так как n – натуральное, $n \ge 500$. Следовательно, при $n \ge 500$ выполняется неравенство

$$\left[\frac{(n+1)^2}{1000}\right] > \left[\frac{n^2}{1000}\right], \text{ т. е. все числа}$$

$$\left[\frac{500^2}{1000}\right], \left[\frac{501^2}{1000}\right], \ldots, \left[\frac{999^2}{1000}\right], \left[\frac{1000^2}{1000}\right]$$

различны, а значит, всего здесь перечислено 501 число. Аналогично, так как неравенство

$$\frac{(n+1)^2}{1000} - \frac{n^2}{1000} < 1$$

выполняется при $n \le 499$, то среди чисел

$$\left[\frac{1^2}{1000}\right],, \left[\frac{2^2}{1000}\right],, \ldots, \left[\frac{498^2}{1000}\right],, \left[\frac{499^2}{1000}\right]$$

встречаются все числа

$$\text{от } \left[\frac{1^2}{1000}\right] = 0 \text{ до } \left[\frac{499^2}{1000}\right] = 249,$$

т. е. 250 чисел. Осталось заметить, что

$$\left[\frac{500^2}{1000}\right] = 250, \left[\frac{499^2}{1000}\right] = 249, \ 250 \ne 249 \text{ и найти}$$

общее количество различных чисел: $501 + 250 = 751$.

Ответ: 751.

Таким образом, использование при изучении математики системы задач повышенной сложности и поэтапной схемы их решения направлено на формирование у обучающихся общего подхода к решению, когда задача рассматривается как объект для анализа, исследования, а ее решение – как конструирование и изобретение способа решения. При этом обучающиеся не только активно овладевают математической деятельностью, но и приобретают умения мыслить самостоятельно и творчески.

Список литературы

1. Терёшин Д. А. О принципах построения методической системы обучения геометрии в классах физико-математического профиля на основе задачного подхода // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (TSPU Bulletin). 2015. Вып. 1 (154). С. 72–79.
2. Купцов Л. П., Резниченко С. В., Терешин Д. А. Российские математические олимпиады школьников. Книга для учащихся. Ростов-на-Дону: Феникс, 1996. 640 с.
3. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. Киров: АСА, 1994. 272 с.
4. Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С. Задачи с параметром. 3-е изд., доп. и перераб. М.: Илекса; Харьков: Гимназия, 1998. 336 с.

Гриншпон Я. С., кандидат физико-математических наук, доцент.
Национальный исследовательский Томский государственный университет.
Пр. Ленина, 36, Томск, Россия, 634050.
E-mail: grinshpon@mail.ru

Подстригич А. Г., кандидат педагогических наук, доцент.
Томский государственный педагогический университет.
Ул. Киевская, 60, Томск, Россия, 634061.
E-mail: anpodstrigich@mail.ru

Материал поступил в редакцию 17.06.2015

Ya. S. Grinshpon, A. G. Podstrigich

SPECIAL FEATURES OF TEACHING HIGH-SCHOOL STUDENTS SKILLS FOR SOLVING MATHEMATICS PROBLEMS OF HIGHER COMPLEXITY

From the standpoint of activity theory we discuss the methodological features of teaching students skills for solving mathematics problems of higher level of complexity. We propose a classification of this type of problems (problems with parameters, problems on divisibility, problems on the decimal representation of numbers, Diophantine equations, problems on finding the largest or smallest natural values satisfying given conditions, problems on the integer part of numbers, etc.) and a step-by-step method for solving them. For each type we provide a set of examples of non-standard problems with full solutions aimed at development of students' positive motivation, independent thinking, and action skills necessary for their successful mastering of mathematical activity. The developed materials can be used as part of a school course in advanced study of mathematics, as well as to prepare students for the All-Russian Olympiads in mathematics.

Key words: *mathematics problems of higher complexity, step-by-step method for solving non-standard problems, problem-centered approach to learning, mathematical activity.*

References

1. Teryoshin D. A. O printsipakh postroeniya metodicheskoy sistemy obucheniya geometrii v klassakh fiziko-matematicheskogo profilya na osnove zadachnogo podkhoda [On the principles of construction of methodical system in geometry for the classes of physical and mathematical profile based on the problem solving approach]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta – TSPU Bulletin*, 2015, vol. 1 (154), pp. 72–79 (in Russian).
2. Kuptsov L. P., Reznichenko S. V., Tereshin D. A. *Rossiyskiye matematicheskiye olimpiady shkol'nikov. Kniga dlya uchashchikhsya* [Russian mathematical Olympiad. The student book]. Rostov-on-Don, Feniks Publ., 1996. 640 p. (in Russian).
3. Genkin S. A., Itenberg I. V., Fomin D. V. *Leningradskiye matematicheskiye kruzhki: posobiye dlya vneklassnoy raboty* [Leningrad mathematical circles: a handbook for out-of-class work]. Kirov, ASA Publ., 1994. 272 p. (in Russian).
4. Gornshteyn P. I., Polonsky V. B., Yakir M. S. *Zadachi s parametrom* [Problems with a parameter]. Moscow, Ileksa Publ., Har'kov, Gimnaziya Publ., 1998. 336 p. (in Russian).

Grinshpon Ya. S.
National Research Tomsk State University.
Pr. Lenina, 36, Tomsk, Russia, 634050.
E-mail: grinshpon@mail.ru

Podstrigich A. G.
Tomsk State Pedagogical University.
Ul. Kievskaya, 60, Tomsk, Russia, 634061.
E-mail: anpodstrigich@mail.ru