Е.М. Горбатенко

ПРИНЦИП ПЕРЕНЕСЕНИЯ КОТЕЛЬНИКОВА-ШТУДИ И ТОРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НАД АЛГЕБРОЙ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Томский государственный университет

УДК 551.594.21

Введение

Геометрия над алгебрами возникла как обобщение евклидовой геометрии (в ней с каждой декартовой системой координат связывается правило, согласно которому каждой точке ставится в соответствие упорядоченный набор из трёх действительных чисел) в связи с попытками интерпретировать линейчатую геометрию (геометрию прямых в евклидовом пространстве) как точечную геометрию нового пространства, в котором точкам сопоставляются упорядоченные наборы элементов из некоторой двумерной алгебры – алгебры дуальных чисел. Такой подход был предложен независимо А.П. Котельниковым в 1895 г. и Э. Штуди в 1900-м и нашел применение в механике [1]. Он был назван «принципом перенесения» в том смысле, что евклидова геометрия точечного пространства «переносится» в линейчатое пространство.

При переходе к более общей n-мерной центроаффинной геометрии мы задаём набор из n координатных гиперплоскостей, проходящих через центр O центроаффинного пространства A^n, и трактуем пространство прямых $G(1, A^n)$ в A^n как D-торическое многообразие, см. прим. 2.

Линейчатая геометрия

Рассмотрим центроаффинное вещественное пространство A^n с центром в точке O и через $G(1, A^n)$ обозначим многообразие всех прямых в A^n. Подмногообразие $\mathbf{P}(A^n)$ всех прямых, проходящих через центр изоморфно проективному пространству $\mathbf{P}^{n-1}$. Пусть l – некоторая прямая и N^+ – произвольная точка на этой прямой. Обозначим через $-l$ прямую с отмеченной точкой N^-, лежащую в плоскости ON^+ и параллельную l, причём $\overrightarrow{ON^-}=-\overrightarrow{ON^+}$. Прямая $-l$ определена однозначно и не зависит от выбора точки N^+. Пусть $\mathbf{Z}_2=\{\bar{0}, \bar{1}\}$. Мы полагаем $\bar{0}\times l=l$, $\bar{1}\times l=-l$.

Ясно, что на $G(1, A^n)$ корректно определено действие группы $\mathbf{Z}_2$, причём касательное многообразие $\mathbf{TP}(A^n)$ является множеством неподвижных точек этого действия.

Покажем, что многообразие $G(1, A^n)$ изоморфно касательному многообразию $\mathbf{TP}(A^n)$.

Зададим в A^n аффинную систему координат $(x^0, ..., x^{n-1})$ с центром в точке O. Пространство отложенных от точки векторов обозначим через V^n. Рассмотрим гиперповерхность S: $(x^0)^2+...+(x^{n-1})^2=1$.

Тогда на прямой l_0, проходящей через точку O, будут выделены ещё две точки $S\cap l=\{M_0^+, M_0^-\}$. Полагаем $e_0=\overrightarrow{OM_0^+}$. Тогда $-e_0=\overrightarrow{OM_0^-}$. Для того чтобы задать касательный вектор в точке l_0 проективного пространства $\mathbf{P}(A^n)$, достаточно поставить в соответствие какому-либо направляющему вектору на прямой l_0 параллельную прямую $l\subset A^n$. Таким образом, паре векторов $\pm e_0\in l_0$ сопоставляется пара параллельных прямых $l_\pm\subset A^n$. При этом прямые расположены в одной плоскости и для всякой точки $M^-\in l_-$ имеется точка $M^+\in l_+$*, причём $\overrightarrow{OM^-}=-\overrightarrow{OM^+}$. Из изоморфизма векторных пространств $T_{l_0}\mathbf{P}(A^n)$ и $Hom(l_0, V^n/l_0)$ и определения фактор-пространства V^n/l_0 следует, что набор $(\pm e_0, l_0)$ определяет один единственный касательный вектор в точке l_0 многообразия $\mathbf{P}(A^n)$. Так как $l_-=-l_+$, отсюда следует наше утверждение. Более того, проективное пространство $\mathbf{P}(A^n)$ является секущим подмногообразием, соответствующим нулевому сечению касательного расслоения p:$\mathbf{TP}(A^n)\to\mathbf{P}(A^n)$.

Торы над алгеброй дуальных чисел

Как известно [1], D алгебра дуальных чисел является двумерным векторным пространством над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел с базисом $\{1, \varepsilon\}$ и правилом умножения $(x_1+\varepsilon t_1)(x_2+\varepsilon t_2)=x_1x_2+\varepsilon(x_1t_2+x_2t_1)$.

Подмножество $T_\pm=\{r(1+\varepsilon\theta)|r, \theta\in\mathbf{R}, r\neq 0\}$ из D является группой обратимых элементов алгебры D. Его подгруппа $T_\pm=\{r(1+\varepsilon\theta)|r, \theta\in\mathbf{R}, r>0\}$ в дальнейшем будет называться одномерным дуальным тором.

Полагаем для всякого элемента $z\in D$, $z=x+\varepsilon t\in\mathbf{R}$, $\bar{z}=z=x-\varepsilon t$, $|z|^2=z\bar{z}$. Если $z\in T$, полагаем $x=\operatorname{Re}z$, $\frac{y}{x}=\arg z$. Ясно, что $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2$, $z_1z_2\in T$. Пусть $T^n=T\times...\times T$ (n раз).

Операция умножения в торе T^n производится покоординатно. Группу T^n назовём n-мерным дуальным тором.

Для дальнейшего будет полезен формализм, заимствованный из алгебры $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Полагаем $e^{\varepsilon\theta}=1+\varepsilon\theta$, $\theta\in\mathbf{R}$. Тогда для всякого $z\in T_\pm$ его дуальная степень определяется следующими условиями:

$$z^t=|z|^t(1+\varepsilon t\arg z),\ t\in\mathbf{R},\ \operatorname{Re}z>0$$

$z^a = (\operatorname{Re} z)^a (1+\varepsilon a \arg z)$, $a \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{Re} z \neq 0$;

$z^{t+\varepsilon\tau} = z^t (1+\varepsilon\tau a \ln|z|), t, \tau \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Re} z > 0$;

$z^{a+\varepsilon\tau} = z^a (1+\varepsilon\tau \ln z)$, $a \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{Re} z \neq 0$.

Эта операция обладает всеми обычными свойствами степени.

Легко видеть, что для $n{\times}m$-матрицы дуальных чисел

$$A = (a_{ij} + \varepsilon t_{ij}),\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m, \qquad (1)$$

где a_{ij} – целые числа, отображение $\Phi_A: T^m \to T^n$

$\Phi_A(z_1, \ldots, z_m) = \left(z_1^{a_{11}+\varepsilon t_{11}} \times \ldots \times z_m^{a_{1m}+\varepsilon t_{1m}}, \ldots, z_1^{a_{n1}+\varepsilon t_{n1}} \times \ldots \times z_m^{a_{nm}+\varepsilon t_{nm}}\right)$

является гомоморфизмом абелевых групп Ли. Верно и обратное утверждение:

Теорема 1. Всякий алгебраический гомоморфизм Φ дуальных торов $\Phi: T^m \to T^n$ имеет вид Φ_A для некоторой матрицы вида (1).

Доказательство. Обозначим через $\Phi: T \to T$ следующий гомоморфизм групп

$$\Phi^i_j(z) = pr_j(\Phi(1, \ldots, 1, z_i, 1, \ldots, 1))$$

Справедлива следующая

Лемма. Всякий D-аналитический гомоморфизм групп $\Phi: T \to T$ имеет вид

$$\Phi(z) = z^{a+\varepsilon t}(1+\varepsilon bz),$$

где a, b, t – любые вещественные числа. Если же ф продолжается на множество всех обратимых элементов алгебры D, тогда a является целым. Из этой леммы легко следует теорема.

Конусы и веер

Определение. Назовём D – выпуклым множеством в D^n всякое множество $M \subseteq D^n$, удовлетворяющее условию:

Для любых $x, y \in M$, $z_1x+z_2y \in M$, где $|z_1|+|z_2|=1$.

Множество будем называть строго выпуклым, если в предыдущем условии дополнительно предполагается, что $|z_1| = \operatorname{Re} z_1$, $|z_2| = \operatorname{Re} z_2$. Отметим, что $\arg(z_1 x_i) = \arg z_1 + \arg x_i$, $\arg(z_2 x_i) = \arg z_2 + \arg x_i$; это приводит к ослабленному условию выпуклости в ε-направлении. В самом деле,

$$r_1(1+\varepsilon t_1)\left(x_i + \varepsilon \overset{\circ}{x}_i\right) + r_2(1+\varepsilon t_2)\left(y_i + \varepsilon \overset{\circ}{y}_i\right) = (r_1 x_i + r_2 y_i) \times$$
$$\times \left(1 + \varepsilon\left(1 + \frac{r_2 y_i}{r_1 x_i + r_2 y_i} t_2 + \frac{r_1 x_i}{r_1 x_i + r_2 y_i} t_1\right)\right).$$

Множество будем называть D-коническим, если для любого $x \in M \subseteq D^n$, $z \in D$, для которого $|z| = \operatorname{Re} z$ выполняется $zx \in M$.

Пусть $E_1, \ldots, E_k$ – набор D-линейно независимых векторов из D^n. Множество $\langle E_1, \ldots, E_k \rangle_+ = \{\lambda_1 E_1 + \ldots + \lambda_k E_k | \operatorname{Re}\lambda_1 \geq 0, \ldots, \operatorname{Re}\lambda_k \geq 0\}$ будем называть конусом с образующими. Конус будем называть целочисленным, если $\operatorname{Re} E_1, \ldots, \operatorname{Re} E_k \in \mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n \subset D^n$. Конус назовём симплициальным, если его образующие линейно независимы и могут быть дополнены до базиса в D^n. В этом случае число k называется его размерностью. Вещественной частью конуса будем называть множество $\operatorname{Re} C = \{\operatorname{Re} z | z \in C\}$. Конус называется вещественным, если

$\operatorname{Re} E_1 = E_1, \ldots, \operatorname{Re} E_k = E$

Как и в торической геометрии над **C** [2, 3] набор симплициальных целочисленных конусов $\Sigma = \{\sigma_i\}$ назовём веером, если

1) $\langle E_{i_1}, \ldots, E_{i_l} \rangle_+ \subset \langle E_1, \ldots, E_k \rangle_+ \in \Sigma \Rightarrow \langle E_{i_1}, \ldots, E_{i_l} \rangle_+$

2) $\sigma_i, \sigma_j \in \Sigma \Rightarrow \sigma_i \cap \sigma_j \in \Sigma$,

3) $\cup_i \operatorname{Re}\sigma_i = \mathbf{R}^n$.

Веер, все конусы которого вещественные, будем называть вещественным веером. Веер $\operatorname{Re}(\Sigma) := \{\operatorname{Re}\sigma_i, \sigma_i \in \Sigma\}$ будем называть вещественной частью веера Σ.

Замечание. Если условие 2 ослабить до 2бис $\sigma_i, \sigma_j \in \Sigma \Rightarrow \operatorname{Re}(\sigma_i \cap \sigma_j) = \operatorname{Re}\sigma_k$ для некоторого $\sigma_k \in \Sigma$, тогда говорим о неголономном веере.

Из веера $\Sigma = \{\sigma_i\}$ следующим стандартным способом [2] строится дифференцируемое многообразие: для любых $\Sigma = \{\sigma_i\}$ размерности n (существование таких σ следует из конечности Σ и условия 3) определяем матрицу перехода от базиса $E_1, \ldots, E_n$, где $\sigma = \langle E_1, \ldots, E_k \rangle_+$, к базису $\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n$, где $\tau = \langle \tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n \rangle_+$, $A_{\sigma,\tau} = (A_{\sigma,\tau}(i,j)) = (A^{-1}{}_{\sigma,\tau})^t$.

Полагаем $X_\Sigma = \dot{\bigcup}_{\dim\sigma=n} D^n_\sigma / \approx$, где отношение эквивалентности $x_\sigma \approx y_\tau$ имеет вид

$$x_\sigma = y_\tau^{A_{\sigma,\tau}} := \left(y_\tau^{A_{\sigma,\tau}} \times \ldots \times y_\tau^{A_{\sigma,\tau}}, \ldots, y_\tau^{A_{\sigma,\tau}} \times \ldots \times y_\tau^{A_{\sigma,\tau}}\right)$$

и рассматриваются только те пары, для которых $\operatorname{Re} y_{\tau j} \neq 0$, как только $\operatorname{Re} A_{\sigma,\tau}(i,j) < 0$. Из построения следует, что множество X_Σ, снабженное фактортопологией является хаусдорфовым топологическим пространством и наделяется структурой дифференцируемого многообразия и, как показывает более тщательный анализ, -аналитическим многообразием [1].

Теорема 2. Если веер Σ вещественный, тогда многообразие X_Σ является касательным расслоением над гладким вещественным торическим многообразием $X_{\operatorname{Re}(\Sigma)}$.

Пример 1. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис $\mathbf{R}^n$ и $e_0 = -(e_1 + \ldots + e_n)$*. Рассмотрим следующий набор n-мерных конусов.

$\sigma_0 = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle_+$, $\sigma_1 = \langle e_0, e_2, \ldots, e_n \rangle_+$, ...,

$\sigma_i = \langle e_0, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n \rangle_+$, $\sigma_n = \langle e_0, \ldots, e_{n-1} \rangle_+$.

Он порождает веер $\Sigma(\mathbf{P}^n)$, а соответствующие матрицы, задающие функции перехода имеют вид $\left(A_{k,0}(i,\ j)\right)$, $A_{k,0}(i,i)=1, i \neq k$, $A_{k,0}(i,k)=-1$, $i=1, \ldots, n$.

Явный вид функций перехода

$$z_{kj}=\begin{cases}\dfrac{z_{0j}}{z_{0k}}, k \neq j \\ \dfrac{1}{z_{0k}}, k=j\end{cases},$$

показывает, что $X_{\Sigma(\mathbf{P}^n)} \cong T\mathbf{P}^n$.

Пример 2. Координатные гиперпространства в A^n задают набор гиперплоскостей в $\mathbf{P}(A^n)$. Координатные гиперпространства $\Gamma_i \subset A^n$ $x^i=0, (i=0, \ldots, n-1)$ позволяют определить действие тора $T_{\mathbf{R}}^{n-1}$ на $\mathbf{P}(A^n)$ и действие тора $T_{\pm}^{n-1}$ на $G(1, A^n)$.

В первом случае мы просто полагаем

$$\left(t^1, \ldots, t^{n-1}\right)\left(x^0: \ldots,: x^{n-1}\right)=\left(x^0: t^1 x^1: \ldots,: t^{n-1} x^{n-1}\right).$$

Во втором случае достаточно задать действие на точках $(M_0, \ldots, M_{n-1})$ пересечения прямой l с координатными гиперплоскостями Γ_i, $(i=0, 1, \ldots, n-1)$.

Мы полагаем для всякого $\left(t^0\left(1+\varepsilon\tau^0\right), \ldots, t^{n-1}\left(1+\varepsilon\tau^{n-1}\right)\right) \in T$,

$$(t^0(1+\varepsilon\tau^0), \ldots, t^{n-1}(1+\varepsilon\tau^{n-1}))(M_0, \ldots, M_{n-1})=(N_0, \ldots, N_{n-1})$$

где $N_0=\left(t^1, \ldots, t^{n-1}\right) M_0$,

$$\overrightarrow{OM_0}+\varepsilon\overrightarrow{M_0 N_i}=\left(z_0^i, \ldots, z_{n-1}^i\right),\ i=1, \ldots, n-1,$$

$$z_0^i=x^0\left(M_i\right)+\varepsilon\left(x^0\left(M_i\right)-x^0\left(M_0\right)\right)^*,$$

$$z_1^i=\left(t^1+\varepsilon t^1\tau^1\right)\left(x^1\left(M_i\right)+\varepsilon\left(x^1\left(M_i\right)-x^1\left(M_0\right)\right)\right), \ldots,$$

$$z_{n-1}^i=\left(t^n+\varepsilon t^n\tau^n\right)\left(x^{n-1}\left(M_i\right)+\varepsilon\left(x^{n-1}\left(M_i\right)-x^{n-1}\left(M_0\right)\right)\right).$$

Этими условиями точки $(N_0, \ldots, N_{n-1})$ определены однозначно.

Теорема 3. Каноническое отображение $\pi: G\left(1, A^n\right) \rightarrow G\left(1, A^n\right) / \mathbf{Z}_2 \cong T\mathbf{P}\left(A^n\right)$ является гомоморфизмом D-торических многообразий.

Замечание. Эта теорема показывает, что имеет смысл категория D-торических орбифолдов [3]. Фактор-пространство $G(1, A^n)/\mathbf{Z}_N$, $N>2$ приводит к взвешенному проективному пространству (орбифолду) и касательному многообразию над ним [4,5].

Литература

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами. Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1985. 264 с.
2. Ehlers Fritz. Eine Klasse komplexer Mannigfaltigkeiten und die Auflosung einiger isolierter Singularitaten // Math. Ann. 218. 127–156. (1975).
3. Oda Tadao. Convex Bodies and Algebraic Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 212 p.
4. Lerman E., Tolman S. Hamiltonian torus actions on symplectic orbifolds and toric varieties, Transaction of the A.M.S. 349 № 10. (1997), 4201–4205.
5. Prato Elisa. Simple Non-Rational Convex Polytopes via Symplectic Geometry, arXiv: math. SG/9904179, 15 p.

Н.Р. Щербаков

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ КЛАССЕ ПЛОСКОСТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В МНОГОМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Томский государственный университет

УДК 551.594.21

Плоскостной поверхностью (регулюсом) в многомерном пространстве принято называть a-параметрическое семейство $L(a)$ d-мерных плоскостей, для которого $d+a$ меньше размерности пространства. Как точечное многообразие – это поверхность $X(d,a)$ $(X \in L)$, $(d+a)$-мерная касательная плоскость $TX(d,a)$ которой в регулярной точке X содержит плоскостную образующую L. Если при смещении внутри L касательная плоскость не меняется, то поверхность $X(d,\ a)$ называется тангенциально вырожденной (аналог торсов 3-мерного пространства). В [1] было введено понятие плоскостной поверхности типа σ. Для нее касательные плоскости при смещении внутри L пересекаются по одной и той же «ассоциированной» плоскости $l_{d+\sigma}^* \supset L$. Простейший пример такой поверхности – 3-параметрическое семейство 2-мерных плоскостей в шестимерном проективном пространстве P_6. Касательные 5-плоскости $TX(2,\ 3)$ этой гиперповерхности во всех точках образующей L пересекаются по ассоциированной плоскости $l_{2+2}^* \equiv l_4^*$; таким образом, мы имеем плоскостную поверхность типа 2.

Присоединим к семейству $L(3)$ подвижной репер $\{A_I\}$, $(I,\ J,\ K=0, \ldots, 6)$ так, чтобы вершины A_i $(i=0, 1, 2)$ лежали в плоскости L, вершины A_r $(r=3, 6)$ – в ассоциированной плоскости l_4^*, а вершины A_s $(s=4, 5)$ – в касательном подпространстве $TL(3)$ семейства [2], совпадающем с P_6. Деривационные формулы репера имеют вид $dA_I=\omega_I^J A_J$,