

СТРУКТУРА ЗАДАЧИ И ЕЕ МЕСТО В ПОСТРОЕНИИ ЛИНИИ СЮЖЕТНЫХ ЗАДАЧ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Раскрывается необходимость рассмотрения структуры сюжетных задач для построения линии сюжетных задач в основной школе. Знание структуры сюжетной задачи позволит: определить порядок построения линии сюжетных задач при обучении математике; целенаправленно организовать поиск решения сюжетной задачи, ориентируясь на один или несколько способов ее решения; осуществить перенос зависимости между структурой сюжетной задачи и способами ее решения на другую математическую и нематематическую задачу.

Ключевые слова: структура задачи, структура решения задачи, линия сюжетных задач, методологическая функция сюжетных задач.

Сюжетные задачи – это наиболее традиционный вид математических задач. Они всегда занимали одно из ведущих мест в обучении математике, так как их функции в обучении весьма значительные. Одна из важнейших функций сюжетных задач – методологическая, суть которой заключается в том, что с помощью сюжетных задач обучаемый может познавать реальную действительность, осознавать те знания и умения, которые необходимы при решении любых задач, а не только сюжетных. В теории и методике обучения решению сюжетных задач выделяют различные теоретические аспекты: понятие сюжетной задачи, методы решения задачи, приемы поиска решения задачи, структура задачи и др. В данной статье мы рассмотрим лишь место структуры сюжетной задачи в построении линии сюжетных математических задач в основной школе.

Структурный анализ школьных сюжетных задач, содержащихся в действующих школьных учебниках по математике, показал, что они имеют ряд недостатков:

- не обладают свойством структурной полноты;
- имеют большое число однотипных сюжетных задач с малым коэффициентом сложности, причем чем сложнее задача, тем меньшее их количество содержится в школьных учебниках и задачниках;
- в предлагаемых системах сюжетных задач нарушена иерархия по степени их сложности; имеется большое число повторов задач одной и той же структуры, которые отличаются либо только числовыми данными, либо сюжетом;
- отсутствуют задачи, позволяющие показать, что задачи с одинаковой внутренней структурой независимо от сюжета и числовых характеристик величин имеют один и тот же путь решения при введенных соглашениях при решении сюжетных математических задач (так, при решении сюжетных задач в курсе физики обязательно необходимо учитывать плотность вещества, в то время как при решении таких же задач в курсе математики этот показатель чаще всего не учитывается).

Все это, в свою очередь, не позволяет сформировать у учащихся целостного представления о зада-

чах, приемах поиска их решения и выборе метода и способа их решения. Целостный же подход в обучении математике – это одно из эффективных условий формирования системности знаний учащихся и оптимизации процесса обучения как по времени, так и по успешности решения задач. Кроме того, знания о структуре сюжетной задачи позволят авторам школьных учебников, составителям задач и учителям определить место ее в школьной линии сюжетных задач с целью реализации ведущих функций данного вида задач.

Проведенный анализ имеющихся философских определений структуры, призванных отразить наиболее общие и существенные аспекты этого понятия, позволил выделить обобщенные определения понятия «структура», приведенные в «Философской энциклопедии»: «Структура – относительно устойчивое единство элементов, их отношений и целостности объекта, инвариантный аспект системы» [1] и в «Философском словаре»: «Структура – строение и внутренняя форма организации системы, выступающая как единство устойчивых взаимосвязей между ее элементами, а также законов данных взаимосвязей» [2]. Наиболее важная характеристика структуры – целостность, единство устойчивых взаимосвязей – присутствует всегда.

Будем рассматривать сюжетную задачу как систему, а «под системой понимается непустое множество элементов (объектов), на котором реализовано заранее данное отношение R с фиксированными свойствами P » [3, с. 19]. В сюжетной задаче, как в сложной системе, можно выделить ее элементы и связи (отношения) между элементами задачи как системообразующие связи, при этом сюжетные задачи мы рассматриваем со всеми внутренними и внешними связями и их свойствами, которые обеспечивают целостность задачи, ее устойчивость и организацию. В теории и методике обучения математике существуют различные подходы к пониманию структуры задачи. Рассмотрим некоторые из них.

Л. М. Фридман рассматривает структуру задачи как «инвариантный аспект задачи, то есть то, что остается неизменным при любых преобразованиях за-

дачи, не затрагивающих ее основного содержания» [4, с. 22]. Для установления структуры задачи Л. М. Фридман предлагает сначала выявить все ее составные части, все ее элементы и отношения между ними, отбросить все лишнее и второстепенное, не влияющее на структуру задачи. Для этого формулировку сюжетной задачи требуется представить как сложный комплекс высказывательных форм и требований. На основе обобщенных высказывательных моделей задачи строятся символические структурные модели. Так как всякая сюжетная задача состоит из условия, требования, оператора, то ее структуру можно представить в виде следующей схемы:

Условие $\{?\}$ $\xrightarrow{\text{оператор}}$ требование, где $\{?\}$ $\xrightarrow{\text{оператор}}$ есть знак оператора задачи.

А. М. Сохор под структурой задачи понимает «характер внутренних отношений (связей, зависимостей) между данными и искомыми величинами» [5, с. 132] и предлагает для изучения структуры задачи рассматривать не ее условие как таковое, а ее решение.

В своих исследованиях Ю. М. Колягин в любой задаче выделяет основные элементы А, В, R, С, отражающие определенное состояние системы P_x в системе (S, P), где S – субъект; P – множество, образующее систему. А – начальное состояние (фактически это условие задачи: данные элементы и связи между ними) – характеристика проблемности; В – конечное состояние – характеристика стационарности системы P (это заключение или цель задачи – искомые элементы и связи между ними). Решение задачи R (основное отношение в системе отношений между данными и искомыми) – преобразование системы P_x в систему P – один из возможных способов перехода от начального состояния ситуации к конечному. Базис решения задачи – С – множество факторов, определяющих некоторое решение R, т. е. теоретическая или практическая основа для преобразования P_x в P посредством данного решения (обоснование решения) [6, с. 51].

В. И. Крупич рассматривает структуру задачи на основе процесса поиска ее решения и строго разграничивает структуру задачи и структуру процесса ее решения, которые между собой взаимосвязаны. Для сюжетных задач выделяется одна или несколько ситуаций (событий, случаев). Каждая ситуация формируется тем или иным отношением. Текстом задачи всегда определено основное отношение (существующее объективно), являющееся «тем характеристическим свойством, которое определяет элементы задачи, входящие в ее внутреннюю структуру» [7, с. 13], и находится в иерархии отношений на высшем уровне. Основное отношение, управляя процессом поиска логической структуры решения сюжетной задачи, определяет стратегию ее решения.

Таким образом, рассматривая различные подходы к структуре задачи, отметим, что сюжетная задача, как и любая другая, несет в себе две информации: субъек-

тивную и объективную. При этом объективная информация, заключенная в задаче, определяется ее внутренней структурой, а субъективная – внешним строением задачи, т. е. информационной структурой. Проведенный анализ сюжетных задач и их структур позволяет сделать вывод о том, что, с точки зрения информационной структуры, сюжетную задачу можно рассматривать как систему (A, C, R, D, B). В данной системе D – это способ, определяющий процесс решения задачи, т. е. способ действия по преобразованию условий задачи для нахождения искомого в системе «человек-задача», и он может быть не один. В информационной структуре сюжетной задачи все ее компоненты взаимосвязаны и дополняют друг друга.

Внешнее строение любой задачи, в том числе и сюжетной, определяет степень ее проблемности (один из основных компонентов трудности задачи). Степень проблемности задачи зависит от ее места в логике изучения учебного материала, степени ее новизны, интеллектуальных возможностей учащихся, их опыта решения задач и др. Внутренняя же структура сюжетной задачи определяет стратегию ее решения, т. е. ориентировочную основу метода (способа) решения и сложность сюжетной задачи. При этом сложность сюжетной задачи является объективной характеристикой, не зависящей от субъекта, и определяется она внутренней структурой задачи.

Основой метода выявления внутренней структуры задачи является аналитический поиск логической структуры задачи и процесса ее решения в поле объективной информации. Это возможно осуществить, например, с помощью граф-дерева, граф-схем. При построении граф-схемы ситуацию, формализованную в сюжетной задаче основным отношением, рассматривают как элемент ее структуры. Такая ситуация является минимальным компонентом системы (задачи), обладающей свойствами целого. Анализ граф-схемы поиска логической структуры решения задачи показывает наиболее явно, что она является теоретическим базисом и механизмом выявления внутренней структуры задачи. Так, В. И. Крупич [7] рассматривая структуру задачи, анализирует граф-схему решения задачи как функцию от числа элементов, связей между ними и типов связей, т. е. $r(m, n, l)$, где m – число элементов, n – число явных связей, l – число типов связей в структуре задачи. Это позволяет рассчитать сложность задачи. Критерий сложности в этом случае введен как функция $F(r) = m+n+l$, где l может принимать значения 0; 1; 2, а m и n – значения из множества натуральных чисел. Покажем на конкретной сюжетной задаче из школьного учебника [8]: «На пути из Москвы в Ленинград расположен город Тверь. Расстояние между Москвой и Ленинградом 650 км, а между Москвой и Тверью – 167 км. Найти расстояние между Тверью и Ленинградом» подсчет коэффициента ее сложности. Сложность данной задачи по выделенному критерию равна 1, так как чис-

ло элементов задачи $m=1$, число явных связей $n=0$ и число типов связей (l) также равно нулю. Сложность же сюжетной задачи [8]: «Из двух пунктов, расстояние между которыми 340 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Скорость одного на 5 км/ч больше скорости другого. Найти скорости поездов, если известно, что через два часа расстояние между ними было 30 км» по данному показателю – 4, так как $m = 2, n = 1$ и $l = 1$.

Таким образом, зная показатель сложности сюжетной задачи, можно определить ее место в школьной линии сюжетных задач с целью реализации ведущих функций данного вида задач.

Рассматривая сюжетную задачу, учащиеся, исходя из своего опыта решения задач, знаний и умений, связанных с решением сюжетных задач, умения использовать различные модели для поиска решения задач, во многих сюжетных задачах могут по-разному выделять зависимости между величинами, что лежит в основе существования одного или нескольких способов их решения. Так, если внутренняя структура сюжетной задачи не может изменяться при структурно-системном подходе к задаче, то задача имеет один способ решения. Если же при решении сюжетной задачи можно переконструировать первоначально выявленные зависимости, то при этом в процессе решения сюжетной задачи неявные связи становятся явными, появляются новые возможности для установления связей между величинами, ситуациями и др., т. е. происходят, по мнению Карла Дункера [9], моменты, «когда что-то “переворачивается”». Так, задача [10]: «Три водителя грузовиков зашли в придорожное кафе. Один водитель купил четыре санд-

вича, чашку кофе и десять пончиков на общую сумму в 1 доллар 69 центов. Второй водитель купил три сэндвича, чашку кофе и семь пончиков за 1 доллар 26 центов. Сколько заплатил третий водитель за сэндвич, чашку кофе и пончик? (1 доллар = 100 центов)» имеет структуру, которой определяется способ решения, приведенный ниже.

Пусть стоимость одного сэндвича – x центов, одной чашки кофе – y центов, одного пончика – z центов.

Тогда

$$\begin{cases} 4x + y + 10z = 169, \\ 3x + y + 7z = 126. \end{cases} \quad \begin{cases} 8x + 2y + 20z = 338, \\ 9x + 3y + 21z = 338. \end{cases}$$

$$x + y + z = 40.$$

Следовательно, ответ в данной задаче – 40 центов.

Рассмотрим пример сюжетной задачи, имеющей несколько способов решения [10]: «Две машины выехали на пожар из города в село. Первая машина идет со скоростью 100 км/ч, а вторая – со скоростью 90 км/ч. Спустя полчаса из пожарной части в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую на час позже, чем вторую. Какова скорость третьей машины?»

Выделим различные подходы, основанные на выявлении различных взаимосвязей между величинами, к решению данной задачи. Обозначим через x км/ч скорость третьей машины. Чтобы догнать первые две машины, она должна сократить расстояние между собой и машинами на 50 км и 45 км соответственно (она вышла на полчаса позже, а скорости машин 100 км/ч и 90 км/ч). В этом случае модель поиска решения задачи может быть представлена следующим способом.

Величина	Ситуация	
	I (третья машина догонит вторую)	II (третья машина догонит первую)
Прирост скорости, км/ч	$x - 90$	$x - 100$ на ?
Время, ч	$\frac{45}{x - 90}$	$\frac{50}{x - 100}$ на 1
Расстояние, км	45	50

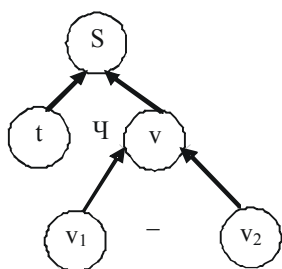
Тогда разрешающая модель задачи – уравнение

$$\frac{45}{x - 90} + 1 = \frac{50}{x - 100}.$$

Однако при выбранном неизвестном можно осуществить и другой путь поиска решения, который выявит другую структуру решения задачи.

Величина	Ситуация		
	I (третья машина догонит вторую)	II (третья машина догонит первую)	III (расстояние до обгона третьей машины первой)
Скорость или прирост скорости, км/ч	$x - 90$	x	100 на ?
Время, ч	$\frac{45}{x - 90}$	$\frac{45}{x - 90} + 1$	на $\frac{1}{2}$ $\frac{45}{x - 90} + \frac{3}{2}$
Расстояние, км	45	$\left(\frac{45}{x - 90} + 1\right) x$	$\left(\frac{45}{x - 90} + \frac{3}{2}\right) 100$

деляются различные тернарные отношения ($a \cdot b = c$, $a_1 + a_2 = a_3$), для которых сложность графа равна $t = 2 \cdot 3 = 6$. Тогда подсчет сложности графа ведется по числу как тернарных отношений, так и по числу всевозможных взаимосвязей между элементами графа. Покажем подсчет данного показателя на примерах конкретных задач из школьных учебников. Так, для задачи [12]: «Велосипедист и мотоциклист выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Скорость мотоциклиста 40 км/ч, а велосипедиста 12 км/ч. Через сколько часов расстояние между ними будет 56 км?» сложность ниже приведенного графа решения данной сюжетной задачи равна $2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 16$. Сложность данного дерева (обозначим ее буквой t) равна сумме сложностей вершины S (обозначим ее t_1) и сложности вершины V (обозначим ее t_2), т. е. $t = t_1 + t_2$. Сложность t_1 равна произведению количества узлов дерева на количество дуг вершины S , т. е. $t_1 = 5 \cdot 2$, а сложность вершины V соответственно данной методике подсчета сложности граф-дерева решения равна 6, т. е. $t_2 = 3 \cdot 2$.



1. $S = vt$
2. $V = v_1 - v_2$
3. $S = (v_1 + v_2)t$

А сложность графа решения сюжетной задачи: «Из двух пунктов, расстояние между которыми 96 км, одновременно навстречу друг другу выехали велосипедист и мотоциклист и встретились через 2 часа. Найти их скорости, если скорость мотоциклиста в три раза больше, чем скорость велосипедиста», который можно построить аналогично, равна 30.

Структура решения задачи – объективная ее характеристика, которая позволяет дать сюжетной задаче количественную оценку, что в свою очередь позволяет систематизировать задачи в систему по нарастающей сложности их решения. Но поскольку сложность структуры решения задачи зависит от способов ее решения, то считаем, что критерием сложности сюжетной задачи целесообразно считать минималь-

ную сложность структуры дерева решения, что соответствует наиболее рациональному способу решения задачи. Структурный анализ решения сюжетных задач основной школы показал, что большинство предлагаемых в учебниках сюжетных задач имеет сложность, не превышающую 40, хотя и имеются задачи, сложность которых равна, например, 152.

Таким образом, структура сюжетной задачи (структура текста задачи, структура задачи и структура решения задачи) должна занимать важное место при обучении учащихся математике и в целесообразном построении линии сюжетных задач, направленной на реализацию методологической функции, так как позво-

– определить порядок построения системы сюжетных задач на основе анализа их сложности, обладающих свойством структурной полноты;

– определить необходимое и достаточное число однотипных сюжетных задач с малым коэффициентом сложности, избежать большого числа повторов задач одной и той же структуры, построить систему сюжетных задач с учетом иерархии их сложности, а также определить место межпредметных задач в обучении учащихся математике;

– целенаправленно обучать приему моделирования, так как при решении любой задачи используются различные модели как на этапе поиска решения, так и на этапе решения (разрешающие модели), а также и сама школьная сюжетная математическая задача может являться моделью реальной ситуации;

– повысить эффективность поиска решения и выбора наиболее рационального пути решения сюжетной задачи, обосновывая в процессе обучения математике независимость пути решения задач с одинаковой внутренней структурой от сюжета задачи и числовых характеристик величин;

– осуществлять «перенос» зависимости между структурой сюжетной задачи и способом ее решения на другую математическую и нематематическую задачу.

Целесообразно выстроенная линия школьных математических сюжетных задач и методика обучения их решению позволит сформировать целостное представление о задачах, методах и способах их решения, значения моделирования в познании окружающей действительности.

Список литературы

1. Философская энциклопедия / гл. ред. Ф. В. Константинов. М.: Сов. энцикл., 1970. Т. 5.
2. Философский словарь / под ред. И. Т. Фролова. М.: Политиздат, 1987.
3. Холодная М. А. Психология интеллекта: парадоксы исследования. М.: Барс, 1997.
4. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи. М.: Просвещение, 1984.
5. Сохор А. М. Логическая структура учебного материала: Вопросы дидактического анализа / под ред. проф. М. А. Данилова. М.: Педагогика, 1974.
6. Колягин Ю. М., Оганесян В. А. Учимся решать задачи: пос. для учащихся VII–VIII классов. М.: Просвещение, 1980.
7. Крупич В. И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач. М.: Прометей, 1995.
8. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Суворова Ю. В. и др. Алгебра: учеб. для 7 кл. сред. шк. М.: Просвещение, 1991.

9. Карл Дункер. Структура и динамика процессов решения задач (о процессах решения практических проблем. Хрестоматия по общей психологии. Психология мышления / под ред. Ю. Б. Гиппенрейтер, В. В. Петухов. М.: Изд-во МГУ, 1981.
10. Фефилова Е. Ф. Теория и методика обучения математике: систематизация знаний и умений по решению сюжетных задач: учеб. пособие. Архангельск: Поморский университет, 2004.
11. Жигачева Н. А., Рыженко Н. Г. Графовое моделирование структур решений сюжетных задач // Математические структуры и моделирование. Омск: ОГУ, 1999. Вып. 4. С. 104–117.
12. Дорофеев Г. В. и др. Математика: учеб. для 5 класса общеобразов. учреждений. М.: Просвещение, 1994.

Фефилова Е. Ф., кандидат педагогических наук, доцент.

Поморский государственный университет им. М. В. Ломоносова.

Пр. Ломоносова, 4, г. Архангельск, Архангельская область, Россия, 163057.

E-mail: fefilova.helen@pomorsu.ru

Материал поступил в редакцию 05.10.2009

E. F. Fefilova

PROBLEMS STRUCTURE AND ITS PLACE IN CONSTRUCTING OF TEXT PROBLEMS LINE IN BASIC SCHOOL

The article considers the necessity of consideration of text problems structure as study object in the course of Mathematics Didactics. The knowledge of text problems structure allows to determine: the construct order of text problems line in teaching mathematics; to organize of the solution search of text problems purposefully and be guided on one or few ways of solution; to carry out carry of dependence between text problem structure and the way of solution for other mathematical or not mathematical problem.

Key words: *structure of the problem, the structure of problem decision, the line of text problem, methodological function of text problems.*

Pomor State University named after M. V. Lomonosov.

Pr. Lomonosova, 4, Arkhangelsk, Arkhangelskaya oblast, Russia, 163002.

E-mail: fefilova.helen@pomorsu.ru