УДК 521.1

Т. С. Бороненко

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА В МЕТОДЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛИ

Рассматривается возможность использования динамических уравнений Пфаффа в методе преобразований Ли. Приводится пример использования данного подхода в методе усреднения уравнений движения возмущенной задачи двух тел. Обсуждается эффективность использования такого алгоритма в теории возмущений, когда для решения задачи требуется построение большого количества приближений.

Ключевые слова: *теория возмущений, метод усреднения, метод канонических преобразований Ли, пфаффиан.*

Введение

Для построения аналитических моделей высокого порядка в теориях возмущений небесной механики требуется выполнение очень громоздких выкладок, что практически невозможно без современных систем компьютерной алгебры. Наиболее приспособленными для компьютерных вычислений являются алгоритмы, основанные на методах рядов и преобразований Ли. Впервые ряды Ли применил в методах теории возмущений небесной механики G. Hori [1]. Модифицированный подход к этой проблеме предложил A. Deprit [2], введя в рассмотрение преобразования Ли. Несмотря на кажущуюся простоту этих методов, в процессе решения практических задач требуется выполнение большого количества преобразований одних систем переменных в другие. Например, теоретические построения решений удобнее выполнять в канонических переменных, на практике возмущающую функцию обычно бывает очень трудно, а иногда невозможно выразить через них. Использование уравнений Гамильтона и Лагранжа связано с некоторыми ограничениями. В первом случае требуется, чтобы переменные были каноническими, во втором случае ограничения связаны с тем, что пространство механики Лагранжа является конфигурационным, и если уравнения Лагранжа представлены явно в виде системы уравнений первого порядка, то необходимо, чтобы половина переменных была производными по времени от остальных. Более гибким методом, у которого нет таких ограничений, является метод, основанный на применении первой дифференциальной формы, или пфаффиана. Проблема использования пфаффовых форм для формулирования задач динамики мало освещена в литературе по небесной механике. Наиболее доступными источниками являются работа [3], в которой выводятся вариационные уравнения теории возмущений на основе первой формы, а также работа [4], в которой дается обзор исследований по данному направлению, здесь же впервые рассматривается теория замены переменных в пфаффовых уравнениях в задачах небесной механики.

В данной работе дается краткое описание метода преобразований Ли, приводится разработанный автором алгоритм, основанный на преобразованиях Ли с использованием динамических уравнений Пфаффа. Дается пример применения данного алгоритма к реализации метода усреднения уравнений движения в спутниковом варианте ограниченной задачи трех тел.

1. Алгоритм преобразований Ли

Рассмотрим метод преобразований Ли применительно к задачам теории возмущений небесной механики. Функция Гамильтона в этом случае может быть представлена в виде

$$H(\eta,\varepsilon) = H_{00}(\eta) + \varepsilon H_{01}(\eta) + \ldots + \varepsilon^m H_{0m}(\eta), \qquad (1)$$

где через η обозначаются два набора: $\eta_1 \ldots \eta_l$ − обобщенные координаты и $\eta_{l+1} \ldots \eta_n$ − обобщенные импульсы. Таким образом, $n = 2l$. Будем считать, что функции, входящие в (1), не зависят явно от времени, ε − постоянный малый параметр. Соответствующие уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{\eta}_i = \frac{\partial H(\eta,\varepsilon)}{\partial \eta_{i+l}}, \quad \dot{\eta}_{i+l} = -\frac{\partial H(\eta,\varepsilon)}{\partial \eta_i}. \qquad (2)$$

Если при $\varepsilon = 0$ система уравнений (2) интегрируема, то при $\varepsilon \neq 0$ обычно определяют каноническую замену переменных $\eta \to \tilde{\eta}$, близкую к тождественной, причем такую, которая может привести функцию Гамильтона к форме, более удобной для дальнейшего исследования.

При указанных выше упрощающих условиях канонические преобразования можно искать в виде рядов Ли. Такой метод основывается на идее, использующей тот факт, что преобразование фазового пространства при помощи движений гамильтоновой системы, является каноническим. При этом вводится дополнительная гамильтонова система для нахождения производящей функции.

Понятие ряда Ли [5] вытекает из решения задачи Коши, которую в данном случае можно сформулировать следующим образом:

$$\dot{\eta}_i = \frac{\partial W}{\partial \eta_{i+l}}, \quad \dot{\eta}_{i+l} = -\frac{\partial W}{\partial \eta_i},$$

$$\eta_i\big|_{t=0} = \tilde{\eta}_i, \quad \eta_{i+l}\big|_{t=0} = \tilde{\eta}_{i+l}, \quad i = 1,\ldots,l, \tag{3}$$

где $W = W(\tilde{\eta}, \varepsilon)$ − некоторая аналитическая функция в окрестности начальной точки $\tilde{\eta}_0 = (\tilde{\eta}_1,\ldots,\tilde{\eta}_n)$.

Решение задачи (3) при $t = \varepsilon$ определяется рядами Ли

$$\eta_j = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} L_w^m \tilde{\eta}_j = \exp(\varepsilon L_w)\tilde{\eta}_j,\ j = 1,\ldots,n, \tag{4}$$

сходящимися для достаточно малых значений параметра ε. В (4) оператор L_W представляет собой скобку Пуассона вида

$$L_w = \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial W}{\partial \tilde{\eta}_i} \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}_{i+l}} - \frac{\partial W}{\partial \tilde{\eta}_{i+l}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}_i} \right). \tag{5}$$

Функция $W(\tilde{\eta}, \varepsilon)$ называется производящей, или генератором Ли, и если эта функция известна, то (4) определяет преобразование $\eta \to \tilde{\eta}$.

Если функцию W представить так же, как исходную функцию Гамильтона в виде ряда

$$W(\tilde{\eta}) = W_{01}(\tilde{\eta}) + \varepsilon W_{02}(\tilde{\eta}) + \ldots + \varepsilon^m W_{0(m+1)}(\tilde{\eta}), \tag{6}$$

то преобразование переменных $\eta \to \tilde{\eta}$ можно найти по простому рекурсивному алгоритму, если известна производящая функция. Ниже приводится алгоритм в изложении [6]:

$$\tilde{\eta}^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} \tilde{\eta}_{k,j-k},$$

$$\tilde{\eta}_{k,j-k} = \frac{1}{k} \sum_{p=0}^{j-k} L_{W_{0(p+1)}} \tilde{\eta}_{k-1,j-k-p},\ \tilde{\eta}^{(0)} = \eta^{(0)}. \tag{7}$$

Преобразование функции Гамильтона и любой другой функции от η, рассматриваемой вдоль решения системы уравнений (2), осуществляется по тем же формулам (7). Обратные преобразования осуществляются по тому же алгоритму при изменении знака у производящей функции. Генератор Ли определяется из (7), если для каждого порядка вычислений задавать форму новой функции Гамильтона. Функция, определяющая генератор Ли $W(\tilde{\eta}, \varepsilon)$, зависит только от новых переменных либо только от старых переменных, если преобразования обратные. Соотношения (7) определяют так называемый треугольник Ли. Например, для нахождения функции Гамильтона $\tilde{H}$ с точностью до ε^n включительно достаточно вычислить (n + 1)(n + 2)/2 элементов треугольной матрицы по алгоритму (7)

$$\begin{array}{llll} \tilde{H}_{00} & \tilde{H}_{01} & \tilde{H}_{02} & \tilde{H}_{03}\ldots \\ \tilde{H}_{10} & \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} & \ldots \\ \tilde{H}_{20} & \tilde{H}_{21}\ldots & & \\ \tilde{H}_{30} & \ldots & & \end{array} \tag{8}$$

и сложить элементы на диагоналях. Описанный метод дает систематический подход к решению задачи о разделении переменных в теории возмущений. Особенно эффективен данный алгоритм в сочетании с методами усреднения. Однако применение этого метода к некоторым задачам небесной механики сопряжено с определенными трудностями. Одна из них состоит в том, что на практике решать задачу усреднения уравнений возмущенного движения в канонических переменных не всегда удобно. В кеплеровых элементах или в их функциях пертурбационная функция намного проще. Как показано в работах [6–7], в принципе всегда можно канонические преобразования на практике реализовать в некоторых произвольных переменных фазового пространства; в частности, это могут быть элементы Кеплера или их функции. Под формулировкой произвольные переменные фазового пространства подразумевается только то, что эти переменные не обязательно являются каноническими. В данной работе выводятся уравнения движения и дается алгоритм преобразований Ли для произвольных переменных фазового пространства.

2. Переход от канонических переменных к произвольным переменным фазового пространства

В соответствии с (7) построение замены переменных (4) и новой функции Гамильтона $\tilde{H}$ сводится к последовательному вычислению скобок Пуассона, возникающих в результате применения дифференциального оператора Ли к некоторым аналитическим функциям $F_{ij}(\eta)$, $i = 0,\ldots,m$; $j = 0,\ldots,m$. Под такими функциями будем подразумевать все функции, которые могут появиться в (8). Знак ~ над переменными можно опустить, так как генератор Ли выражается через переменные только одного типа: старые или новые.

Действие оператора на $F_{ij}(\eta)$, $i = 0,\ldots,m$; $j = 0,\ldots,m$ можно представить следующим образом:

$$L_\kappa F_{ij}(\eta) = \sum_{q=1}^{l} \left(\frac{\partial W_{0\kappa}(\eta)}{\partial \eta_q} \frac{\partial F_{ij}(\eta)}{\partial \eta_{l+q}} - \frac{\partial W_{0\kappa}(\eta)}{\partial \eta_{l+q}} \frac{\partial F_{ij}(\eta)}{\partial \eta_l} \right), \tag{9}$$

где $W_{0\kappa}$ − κ-й коэффициент при ε в разложении производящей функции (6). Чтобы осуществить переход от канонических элементов η_p к некоторым произвольным переменным фазового пространства, достаточно сделать подстановку

$\eta_p = \eta_p(\theta_1,...,\theta_n), (p = 1,...,n)$ (10)

в выражение (9). Запишем выражение (9) в переменных θ

$$L_\kappa F_{ij}(\theta) = \sum_{c=1}^{l}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial W_{0\kappa}(\theta)}{\partial\theta_p}\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_c}\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial F_{ij}(q)}{\partial\eta_p}\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_{l+c}}-\right.$$
$$\left.-\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial W_{0\kappa}(\theta)}{\partial\theta_p}\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_{l+c}}\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial F_{ij}(\theta)}{\partial\theta_p}\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_c}\right)= \quad (11)$$
$$=\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial F_{ij}(\theta)}{\partial\theta_p}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W_{0\kappa}(\theta)}{\partial\theta_s}\sum_{c=1}^{l}\left(\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_c}\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta_{c+l}}-\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_{c+l}}\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta_c}\right).$$

Введем скобки Пуассона

$$\left\{\theta_p,\theta_s\right\} = \sum_{c=1}^{l}\left(\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_c}\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta_{c+l}}-\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_{c+l}}\frac{\partial\theta_s}{\partial\eta_c}\right),$$
$$c = 1,\ldots,l;\ l = n/2. \quad (12)$$

Тогда оператор Ли можно представить в виде

$$L_\kappa F_{ij}(\theta) = \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n}\left\{\theta_p,\theta_s\right\}\frac{\partial W_{0\kappa}(\theta)}{\partial\theta_s}\right)\frac{\partial F_{ij}(\theta)}{\partial\theta_p}. \quad (13)$$

После вычисления скобок Пуассона $a_{ps}(\theta) = \{\theta_p,\theta_s\}$ получаем

$$L_\kappa F_{ij}(\theta) = \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{n}a_{ps}(\theta)\frac{\partial W_{0\kappa}(\theta)}{\partial\theta_s}\right)\frac{\partial F_{ij}(\theta)}{\partial\theta_p} \quad (14)$$

или

$$L_\kappa F_{ij}(\theta) = \sum_{p=1}^{n}W_{p\kappa}\frac{\partial F_{ij}(\theta)}{\partial\theta_p}, \quad (15)$$

где $W_{p\kappa}$ – элементы матрицы

$\Psi = \left\|W_{pk}\right\| \quad (p = 1,\ldots,n;\ \kappa = 1,\ldots,m),$

с помощью которой можно вычислять правую часть (13) для любого κ в элементах θ.

Сделаем аналогичную подстановку

$\eta_p = \eta_p(\theta_1,\ldots,\theta_n), \quad (p = 1,\ldots n)$

в уравнения (2):

$$\dot\theta_p = \sum_{c=1}^{l}\left(\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_c}\dot\eta_c + \frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_{c+l}}\dot\eta_{c+l}\right)=$$
$$=\sum_{c=1}^{l}\left(\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_c}\frac{\partial H(\eta,\varepsilon)}{\partial\eta_{c+l}}-\frac{\partial\theta_p}{\partial\eta_{c+l}}\frac{\partial H(\eta,\varepsilon)}{\partial\eta_c}\right). \quad (16)$$

После преобразования функции $H(\eta, \varepsilon)$ в функцию $E(\theta, \varepsilon)$ можно записать

$$\dot q_p = \sum_{c=1}^{l}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\partial\theta_p}{\partial\eta_c}\sum_{s=1}^{n}\dfrac{\partial E(\theta,\varepsilon)}{\partial\theta_s}\dfrac{\partial\theta_s}{\partial\eta_{c+l}}-\\ -\dfrac{\partial\theta_p}{\partial\eta_{c+l}}\sum_{s=1}^{n}\dfrac{\partial E(\theta,\varepsilon)}{\partial\theta_s}\dfrac{\partial\theta_s}{\partial\eta_c}\end{array}\right)=$$
$$=\sum_{c=1}^{l}\left(\begin{array}{l}\sum_{s=1}^{n}\dfrac{\partial E(\theta,\varepsilon)}{\partial\theta_s}\left(\dfrac{\partial\theta_p}{\partial\eta_c}\dfrac{\partial\theta_s}{\partial\eta_{c+l}}\right)+\\ +\sum_{s=1}^{n}\dfrac{\partial E(\theta,\varepsilon)}{\partial\theta_s}\left(-\dfrac{\partial\theta_p}{\partial\eta_{c+l}}\dfrac{\partial\theta_s}{\partial\eta_c}\right)\end{array}\right). \quad (17)$$

Введя скобки Пуассона по аналогии с (12), получаем

$$\dot\theta_p = \sum_{s=1}^{n}\{\theta_p,\theta_s\}\frac{\partial E(\theta,\varepsilon)}{\partial\theta_s} \quad (p = 1,\ldots,n) \quad (18)$$

или

$$\dot\theta_p = \sum_{s=1}^{n}a_{ps}(\theta)\frac{\partial E(\theta,\varepsilon)}{\partial\theta_s} \quad (p = 1,\ldots,n). \quad (19)$$

Соотношения (19) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Функция $E(\theta, \varepsilon)$ может быть интерпретирована как полная энергия механической системы, выраженная через некоторые переменные θ фазового пространства.

Сравниваем правые части (14) и (19). Форма выражений

$$\sum_{s=1}^{n}a_{ps}(\theta)\frac{\partial W_{0\kappa}(\theta)}{\partial\theta_s} \text{ и } \sum_{s=1}^{n}a_{ps}(\theta)\frac{\partial E(\theta,\varepsilon)}{\partial\theta_s} \quad (20)$$

одинакова. Очевидно, что правые части уравнений (19) дадут i-й столбец матрицы Ψ, если вместо функции $E(\theta, \varepsilon)$ подставить выражение для $W_{0i}(\theta)$ из (6). Таким образом, правые части уравнений (19) могут быть использованы для формирования матрицы Ψ, если известна производящая функция $W(\theta, \varepsilon)$. Поэтому уравнения (19) можно взять в качестве исходных и, пользуясь дифференциальным оператором (15), все вычисления проводить в переменных θ, не выходя за рамки теории преобразований Ли для канонических систем.

Теперь нужно выяснить смысл преобразований (10) и уравнений (19). Это достаточно просто сделать, если ввести в рассмотрение первую дифференциальную форму в расширенном n+1-мерном фазовом пространстве [8].

Введем стандартные обозначения для канонических переменных: $q(q_1,...,q_l)$; $p(p_1,...,p_l)$. Пфаффиан в канонических переменных имеет вид

$$\Phi = \sum_{i=1}^{l}p_i dq_i - H\,dt. \quad (21)$$

Как показано в [9] из инвариантности связи формы (21) с ее линиями ротора вытекает способ вводить уравнения движения в произвольной системе расширенного n+1-мерного фазового пространства. Поэтому можно записать

$$p\,dq - H\,dt = \Theta_1\,d\theta_1 + \ldots + \Theta_n\,d\theta_n - Edt, \tag{22}$$

где $\Theta_1,...,\Theta_n,E$ − компоненты вектора Пфаффа в произвольной системе переменных фазового пространства. Обозначим $\Theta_1,...,\Theta_n,E$ через $X_1,...,X_{n+1}$, а $\theta_1,...,\theta_n,t$ через $x^1,...,x^{n+1}$. Тогда ассоциированную систему уравнений можно представить так:

$$(rot\,\vec{X})\,d\,\vec{x} = 0 \tag{23}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x^j} - \frac{\partial X_j}{\partial x^i}\right) d\,x^j = 0. \tag{24}$$

Приведем пример выражения для пфаффиана. Рассмотрим систему N взаимодействующих материальных точек, имеющую N векторов положений $\vec{r}_i$ и N векторов скоростей $\vec{v}_i$ $\quad i = 1,2,\ldots,N$. Пфаффиан, ассоциированный с такой системой, имеет вид

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i \cdot d\vec{r}_i - (T+U)\,dt, \tag{25}$$

где m_i − массы точек, T − кинетическая и U − потенциальная энергии системы.

В следующем разделе с использованием (24) будут выведены уравнения для возмущенной задачи двух тел.

4. Возмущенная задача двух тел

Рассмотрим движение спутника под действием притяжения планеты и Солнца при условии, что все три тела являются материальными точками. Спутник имеет бесконечно малую массу, т. е. он не оказывает гравитационного воздействия на два других тела. Центральным телом является планета с массой m_0; Солнце, имеющее массу m', движется вокруг планеты по фиксированному эллипсу, который расположен в основной координатной плоскости.

Пфаффиан для данной задачи имеет вид

$$\Phi = \vec{v}\cdot d\,\vec{x} - E\,d\,t = \vec{v}\cdot d\,\vec{x} - \left(\frac{\vec{v}^2}{2} - \frac{\mu}{r} - R\right) d\,t. \tag{26}$$

В (26) $\vec{x}$ − вектор положений, $\vec{v}$ − вектор скоростей спутника в орбитальной плоскости, E − полная энергия системы, μ − гравитационная постоянная Ньютона, умноженная на массу планеты, R − возмущающая функция. Воспользовавшись интегралом энергии задачи двух тел

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{27}$$

(26) можно переписать в виде

$$\Phi = \vec{v}\cdot d\,\vec{x} + \left(\frac{\mu}{2a} + R\right) d\,t, \tag{28}$$

где a − большая полуось орбиты спутника. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{v}$ определяются по известным формулам через эллиптические элементы спутника.

$$\begin{gathered}\vec{x} = a\vec{P}(\cos u - e) + a\sqrt{1-e^2}\,\vec{Q}\sin u,\\ \vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{\mu a}\sin u}{r}\right)\vec{P} + \left(\frac{\sqrt{\mu a}\sqrt{1-e^2}\cos u}{r}\right)\vec{Q},\\ l = u - e\sin u,\ l = n\,t + const.\end{gathered} \tag{29}$$

В (29) $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ – единичные векторы в орбитальной плоскости спутника e – эксцентриситет орбиты спутника, u – эксцентрическая аномалия, l – средняя аномалия спутника. В пространственном случае вектор положений является функцией шести элементов орбиты: $\vec{\sigma} = (a, e, i, l, \omega, \Omega)$. Далее вместо классических элементов вводим модифицированные $\vec{\xi} = (\alpha,\ \tilde{e},\ \tilde{g},\ \Lambda, D, l, \phi, l')$ для того, чтобы получить уравнения в наиболее простой форме.

Здесь $\alpha = \sqrt{a}$, $\tilde{e}$ и $\tilde{g}$ – функции, введенные в [10] с помощью следующих соотношений:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\tilde{e}^2 = 1 - \sqrt{1-e^2},\quad \frac{1}{4}\tilde{g}^2 = \sqrt{1-e^2}\,\gamma^2,\\ \gamma^2 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{i}{2},\end{gathered} \tag{30}$$

где i – наклон орбиты спутника к плоскости орбиты Солнца. D, l, ϕ, l' – основные аргументы Делоне [10]; $D = \lambda - \lambda'$, $u = \lambda - \Omega$, $l = \lambda - \pi$, λ – долгота спутника в орбите, отсчитываемая от выбранного направления оси x прямоугольной системы координат; Ω и π – соответственно долгота восходящего узла и долгота перицентра орбиты спутника; λ' – долгота Солнца; l' – средняя аномалия Солнца, являющаяся линейной функцией времени $l' = \nu t + const$. Введем также параметр $k = \sqrt{\mu}$, $\mu = Gm_0$, G – постоянная всемирного тяготения. Далее выразим пфаффиан через элементы $\vec{\xi}$

$$\begin{gathered}\Phi = \alpha k\left(1 - \frac{1}{2}\tilde{e}^2 - \frac{1}{2}\tilde{g}^2\right) d\,D + \frac{1}{2}\alpha k\,\tilde{e}^2 d\,l +\\ + \frac{1}{2}\alpha k\,\tilde{g}^2 d\,\phi + \left(\Lambda - \alpha k\left(1 - \frac{1}{2}\tilde{e}^2 - \frac{1}{2}\tilde{g}^2\right)\right) dl' - E\,dt\end{gathered} \tag{31}$$

и, воспользовавшись (24), получим следующие уравнения для описания движения спутника:

$$\frac{d\alpha}{dt}=-\frac{1}{k}\left(\frac{\partial E}{\partial D}+\frac{\partial E}{\partial l}+\frac{\partial E}{\partial \phi}\right),$$

$$\frac{d\tilde e}{dt}=-\frac{1}{\alpha k}\left(\frac{\tilde e}{2}\frac{\partial E}{\partial D}+\left(\frac{\tilde e}{2}-\frac{1}{\tilde e}\right)\frac{\partial E}{\partial l}+\frac{\tilde e}{2}\frac{\partial E}{\partial \phi}\right),$$

$$\frac{d\tilde g}{dt}=-\frac{1}{\alpha k}\left(\frac{\tilde g}{2}\frac{\partial E}{\partial D}+\left(\frac{\tilde g}{2}-\frac{1}{\tilde g}\right)\frac{\partial E}{\partial l}+\frac{\tilde g}{2}\frac{\partial E}{\partial \phi}\right),$$

$$\frac{d\Lambda}{dt}=\frac{\partial E}{\partial D}-\frac{\partial E}{\partial l'},$$

$$\frac{dD}{dt}=\frac{1}{k}\left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}-\frac{\tilde e}{2\alpha}\frac{\partial E}{\partial \tilde e}-\frac{\tilde g}{2\alpha}\frac{\partial E}{\partial \tilde g}\right)-\frac{\partial E}{\partial \Lambda},$$

$$\frac{dl}{dt}=\frac{1}{k}\left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}+\left(\frac{1}{\alpha\tilde e}-\frac{\tilde e}{2\alpha}\right)\frac{\partial E}{\partial \tilde e}-\frac{\tilde g}{2\alpha}\frac{\partial E}{\partial \tilde g}\right),$$

$$\frac{d\phi}{dt}=\frac{1}{k}\left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}-\frac{\tilde e}{2\alpha}\frac{\partial E}{\partial \tilde e}+\left(\frac{1}{\alpha\tilde g}-\frac{\tilde g}{2\alpha}\right)\frac{\partial E}{\partial \tilde g}\right),$$

$$\frac{dl'}{dt}=\frac{\partial E}{\partial \Lambda}. \qquad (32)$$

В уравнениях (32) E − функция, представляющая полную энергию системы, выраженная через переменные $\vec\xi=(\alpha,\ \tilde e,\ \tilde g,\ \Lambda, D, l, \phi, l')$:

$$E=-\frac{k^2}{2\alpha^2}+\nu\Lambda+\nu^2 R(\alpha,\tilde e,\tilde g,\Lambda,D,l,\phi,l'). \qquad (33)$$

В (33) ν – среднее движение Солнца, определяемое по формуле

$$\nu^2=\frac{k^2 m'}{a'^2}\left(1+\frac{m_0}{m'}\right),$$

где a' – большая полуось орбиты Солнца.

В выражении (33) первый член $-k^2/2\alpha^2$ обусловлен притяжением планеты в отсутствие возмущений, второй член $\nu\Lambda$ введен для устранения явной зависимости от времени функции E. Третий член ν^2R является возмущающей функцией. Известно, что уравнения (32) не являются интегрируемыми. Одним из основных способов отыскания приближенного решения задачи является переход к более простой системе уравнений, которую можно проинтегрировать. Очевидно, что мы получим такую систему, если с использованием метода усреднения исключим из возмущающей функции R все периодические члены. Следует отметить, что для спутникового варианта ограниченной задачи трех тел эта цель может быть достигнута. Об этом говорят примеры построения аналитических решений для основной лунной проблемы.

Для того чтобы избавиться от собственного вырождения системы (32), будем рассматривать в качестве невозмущенного движения не кеплерово, а более сложное движение, определяемое функцией

$$E^1{}_{00}=-\frac{k^2}{2\alpha^2}+\nu\Lambda+\nu^2 R', \qquad (34)$$

в которой выражение для R' включает в себя только такие члены вековой части возмущающей функции, которые содержат переменные $\tilde e$ и $\tilde g$ не выше второй степени:

$$R'=\frac{1}{4}\alpha^4+\frac{3}{8}\alpha^4\tilde e^2-\frac{3}{8}\alpha^4\tilde g^2. \qquad (35)$$

Все угловые переменные D, l, ϕ, l' являются быстрыми и выбраны таким образом, что может быть применена схема усреднения Делоне-Хилла [11]. В данной работе рассматривается нерезонансная система, тем не менее необходимо изучить строение знаменателей, которые будут появляться в процессе интегрирования. Круговые частоты системы имеют вид

$$\omega_1=k\alpha^{-3}-\nu^2k^{-1}\alpha^3-\frac{9}{8}\nu^2k^{-1}\alpha^3\tilde e^2+$$
$$+\frac{9}{8}\nu^2k^{-1}\alpha^3\tilde g^2-\nu,$$

$$\omega_2=k\alpha^{-3}-\nu^2k^{-1}\alpha^3-\frac{9}{8}\nu^2k^{-1}\alpha^3\tilde e^2+$$
$$+\frac{9}{8}\nu^2k^{-1}\alpha^3\tilde g^2-\frac{3}{4}k^{-1}\alpha^3,$$

$$\omega_3=k\alpha^{-3}-\nu^2k^{-1}\alpha^3-\frac{9}{8}\nu^2k^{-1}\alpha^3\tilde e^2+$$
$$+\frac{9}{8}\nu^2k^{-1}\alpha^3\tilde g^2+\frac{3}{4}k^{-1}\alpha^3,\ \ \omega_4=\nu. \qquad (36)$$

Общее выражение для знаменателей можно записать так:

$$1/\{(i_1+i_2+i_3)k\alpha^{-3}+(i_1+i_2+i_3)(-\nu^2k^{-1}\alpha^{-3})+$$
$$+(i_1+i_2+i_3)(-\frac{9}{8}\nu^2k^{-1}\alpha^{-3}\tilde e^2)+$$
$$+(i_1+i_2+i_3)(\frac{9}{8}\nu^2k^{-1}\alpha^{-3}\tilde g^2)+(i_1-i_4)+$$
$$+(i_1-i_4)(\frac{3}{4}\nu^2k^{-1}\alpha^{-3})\}. \qquad (37)$$

Из (37) можно легко вывести условия для периодов различных тригонометрических членов.

1. $i_1+i_2+i_3\neq 0$ − период соизмерим с периодом обращения спутника вокруг планеты.

2. $i_1+i_2+i_3=0$, $i_1\neq i_4$ − период соизмерим с периодом обращения планеты вокруг Солнца.

3. $i_1+i_2+i_3=0$, $i_1=i_4$ − долгопериодическое возмущение.

В качестве примера рассмотрим процесс исключения из возмущающей функции членов короткого периода. На этом этапе решения задачи в качестве невозмущенного можно рассматривать кеплеровское движение. Запишем выражение для функции E следующим образом:

$$E = E_{00} + E_{01} + E_{02}, \tag{38}$$

где $E_{00} = -\dfrac{k^2}{2\alpha^2}$, $E_{01} = \nu\Lambda$, $E_{02} = R = \nu^2 R_{02}$ элементы, принадлежащие первой строке матрицы (8). Элементы $E_{03},...,E_{03}$ полагаем равными нулю. Когда в качестве невозмущенного рассматривается кеплеровское движение, из возмущающей функции можно исключить только члены короткого периода, для которых выполняется условие $i_1 + i_2 + i_3 \neq 0$. Круговые частоты, определяемые с помощью функции E_{00}, имеют следующие значения: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = k\alpha^{-3}$. Уравнение в частных производных для исключения членов короткого периода для ξ-го порядка имеет вид

$$-k\,\alpha^{-3}\left(\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial D} + \frac{\partial W_{0\xi}}{\partial l} + \frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \phi}\right) = \Xi_{0\xi}, \tag{39}$$

где

$$\Xi_{0\xi} = \bar{E}_{0\xi} - E_{0\xi}^{(1)},\ \bar{E}_{0\xi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} E_{0\xi}^{(1)} d\,l, \tag{40}$$

$E_{0\xi}^{(1)}$ – сумма диагональных элементов матрицы (6) для ξ-го порядка. После того как найдена функция $W_{0\xi}$, формируется ξ-й столбец матрицы

$$\Psi = \left\| W_{pk} \right\| \quad (p = 1,\ldots,n;\ \kappa = 1,\ldots,m)$$

по правым частям уравнений (32):

$$W_{1\xi} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial D} + \frac{\partial W_{0\xi}}{\partial l} + \frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \phi}\right),$$

$$W_{2\xi} = -\frac{1}{\alpha\,k}\left(\frac{\tilde{e}}{2}\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial D} + \left(\frac{\tilde{e}}{2} - \frac{1}{\tilde{e}}\right)\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial\,l} + \frac{\tilde{e}}{2}\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \phi}\right),$$

$$W_{3\xi} = -\frac{1}{\alpha\,k}\left(\frac{\tilde{g}}{2}\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial D} + \left(\frac{\tilde{g}}{2} - \frac{1}{\tilde{g}}\right)\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial\,l} + \frac{\tilde{g}}{2}\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \phi}\right),$$

$$W_{4\xi} = \frac{\partial W_{0\xi}}{\partial D} - \frac{\partial W_{0\xi}}{\partial l'},$$

$$W_{5\xi} = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{e}}{2\alpha}\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \tilde{e}} - \frac{\tilde{g}}{2\alpha}\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \tilde{g}}\right) - \frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \Lambda},$$

$$W_{6\xi} = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \alpha} + \left(\frac{1}{\alpha\tilde{e}} - \frac{\tilde{e}}{2\alpha}\right)\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \tilde{e}} - \frac{\tilde{g}}{2\alpha}\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \tilde{g}}\right),$$

$$W_{7\xi} = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \alpha} - \frac{\tilde{e}}{2\alpha}\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \tilde{e}} + \left(\frac{1}{\alpha\tilde{g}} - \frac{\tilde{g}}{2\alpha}\right)\frac{\partial W_{0\xi}}{\partial \tilde{g}}\right),$$

$$W_{8\xi} = 0. \tag{41}$$

Заключение

Приведенный алгоритм преобразований Ли для произвольных переменных фазового пространства успешно использован для решения задач возмущенного движения далеких спутников Юпитера и Сатурна [12–13]. В данной статье дается более подробное описание метода, устанавливается связь с теорией Пфаффа. Система (28) полностью ранее не была опубликована. Впервые введен пфаффиан в форме (27) для расширенного 9-мерного фазового пространства в возмущенной задаче двух тел. Форма уравнений и приведенный пример решения возмущенной задачи двух тел говорят об эффективности использования такого алгоритма в теории возмущений, когда для решения задачи требуется построение большого количества приближений [14].

Автор благодарен заведующей кафедрой астрономии и космической геодезии ФФ ТГУ, профессору Т. В. Бордовицыной за обсуждение работы и постоянную поддержку.

Список литературы

1. Hori G. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables // J. Japan. Astron. Soc. 1966. Vol. 18. № 4. P. 287–296.
2. Deprit A. Canonical transformations depending on a small parameter // Celest. Mech. 1969. Vol. 1. № 1. P. 12–30.
3. Musen P. On the application of Pfaff's method in the theory of variation of astronomical constants // NASA Technical Note D-2301, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, 1964, 24 p.
4. Broucke R. On Pfaff's equations on motion in dynamics // Celest. Mech. 1978. Vol.18. № 3. P. 207–222.
5. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
6. Холшевников К. В. Преобразования Ли в небесной механике // Астрономия и геодезия. 1973. Вып. 4. С. 21–44.
7. Бороненко Т. С. Алгоритм для реализации в системе Авто-Аналитик метода усреднения уравнений возмущенного движения в кеплеровых элементах // Там же. 1975. Вып. 5. С. 27–45.
8. Бороненко Т. С. Об использовании динамических уравнений Пфаффа в некоторых задачах небесной механики // Аналитическая небесная механика. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. С. 88–92.
9. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

10. Бороненко Т. С. Применение метода преобразований Ли к решению задачи Делоне до третьего порядка // Астрономия и геодезия. 1977. Вып. 6. С.18–25.
11. Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971. 442 с.
12. Boronenko T. S., Shmidt Ju. B. Analitical theory of motion of Phoebe, the Ninth satellite of Saturn // Celest. Mech. and Dynamic. Astr. 1990. Vol. 48. P. 289–298.
13. Boronenko T. S. Construction of solution of restricted three-body problem in modified Hill's variables // Proceedings International meeting "Dynamics of Solar system bodies". Tomsk, July 27 - August 1, 2008. P. 26.
14. Лавров П. М. и др. О вычислении некоторых алгебраических сумм // Вестн. Томского гос. пед. ун-та. 2007. Вып. 6 (69). С. 7–9.

Бороненко Т. С., кандидат физико-математических наук, доцент.
Томский государственный педагогический университет.
Ул. Киевская, 60, г. Томск, Томская область, Россия, 634061.
E-mail: boron@tspu.edu.ru

Материал поступил в редакцию 28.05.2010.

T. S. Boronenko

USE OF DYNAMICAL PFAFF'S EQUATIONS IN THE LIE TRANSFORMATIONS

In the present paper the connection of Pfaff's equations with Lie transformations is considered. The averaging method in the restricted three-body problem based on Lie transformations in Pfaff's space is proposed. The efficiency of such an algorithm for the problem of asymptotic integration in dynamics is discussed for the case where the solutions of the problem require a great number of approximations.

Key words: *perturbation theory, averaging method, Lie transformations, Pfaff's equations, restricted three-body problem, satellites dynamics.*

Tomsk State Pedagogical University.
Ul. Kiyevskaya, 60, Tomsk, Tomsk region, Russia, 634061.
E-mail: boron@tspu.edu.ru