

$$\|K_\varepsilon(m)\|_I \|K^{-1}(m)\|_I \leq \frac{c|R(m-n-1)|}{|K_x(m)|}. \quad (31)$$

Покажем, что из соотношения (10) можно получить

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R(\tau - \xi)}{K(\tau)} = 0. \quad (32)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R(\tau - \xi)}{K(\tau)} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\frac{R(\tau - \xi)}{R(\tau)} R(\tau)}{K_x(\tau)} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R(\tau - \xi)}{R(\tau)} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R(\tau)}{K_x(\tau)} = 0, \end{aligned}$$

если

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R(\tau - \xi)}{R(\tau)} = \text{const} < \infty.$$

Действительно,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R(\tau - \xi)}{R(\tau)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{R(\tau)/R(\tau - \xi)} = \frac{1}{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R(\tau)}{R(\tau - \xi)}}.$$

Из (10) следует, что $R(\tau)$ – функция, убывающая с ростом τ , так как $K_x(\tau)$ – убывающая. Тогда

$$0 < \frac{R(\tau)}{R(\tau - \xi)} < 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R(\tau)}{R(\tau - \xi)} \leq 1, \text{ т.е. } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R(\tau - \xi)}{R(\tau)} = \text{const}. \quad (33)$$

На основании (33) можно заключить, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R(\tau - n - 1)}{K_x(\tau)} = 0, \quad (34)$$

что и требовалось доказать.

Из (32) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое m_0 , что как только $m > m_0$, то выполняется неравенство

$$\frac{R(m - n - 1)}{K_x(m)} < \frac{\varepsilon}{c}. \quad (35)$$

Если в качестве ε выбрать величину

$\|K_\varepsilon(0)\|_I \|K^{-1}(0)\|_I$, то и для этой величины найдется такое m , что как только $m > m_1$, то, по аналогии с (35), выполняется неравенство

$$\|K_\varepsilon(0)\|_I \|K^{-1}(0)\|_I > c \left| \frac{R(m - n - 1)}{K_x(m)} \right|.$$

Таким образом, мы показали, что существуют такие значения, при которых критерий (3) приводит к меньшим ошибкам в решении, нежели критерий (2), при одинаковой погрешности в задании исходных данных.

Литература

1. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач.// ДАН СССР. 1963. Т. 153. № 1.
2. Пугачёв В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., 1962.

УДК 796.56

В.С. Близневская

БИОМЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ «МАЯТНИКОВОГО» ХОДА, ПРИМЕНЯЕМОГО В ЛЫЖНОМ ОРИЕНТИРОВАНИИ

Красноярский государственный технический университет

Введение

Гоночный компонент соревновательной деятельности в лыжном ориентировании имеет свою специфику. Это не просто лыжная гонка с ориентированием определенным стилем лыжного хода. В районе местности, используемой для соревнований, обязательно должны быть подготовлены лыжные трассы трех типов – скоростные (ширина не менее 2 м), быстрые (ширина 1.0–1.5 м) и медленные (ширина 0.8–1.0 м). Все лыжные трассы по правилам соревнований гото-

вятся без нарезки лыжного следа. Дистанция планируется так, чтобы спровоцировать спортсмена использовать лыжные трассы разной градации, изменять скорость движения, демонстрируя при этом разные элементы техники лыжного хода (в том числе специфические лишь для ориентирования).

Анализ путей движения спортсменов показывает, что движение по быстрым лыжным трассам на дистанциях лыжного ориентирования составляет не менее 60 % общей их протяженности. Поэтому общий

уровень двигательных способностей спортсмена во многом определяется скоростью движения по лыжням, ширина которых 1.0–1.5 м без нарезки лыжного следа.

Самый простой выход – двигаться по таким лыжням одновременным бесшажным или полуконьковым ходом. Но это далеко не всегда рационально. Одновременный бесшажный ход эффективен лишь на равнине, в подъемы он не позволяет поддерживать высокую скорость, так как загружает только верхний плечевой пояс спортсмена и брюшной пресс. Другая причина, ограничивающая повсеместное его использование на быстрых лыжнях, – качество этих лыжней. Район проведения соревнований для лыжного ориентирования часто включает быстрые лыжни разной жесткости. Одновременный бесшажный ход широко используется при хорошем и отличном скольжении на жесткой лыжне с твердой опорой под лыжные палки. На мягких или сыпучих лыжнях спортсмен не может прилагать должное усилие для отталкивания, так как палки проваливаются глубоко в снег. В результате нет полноценного отталкивания руками, скорость быстро теряется и необходимы дополнительные усилия для того, чтобы выносить палки вперед для следующего отталкивания.

Полуконьковый ход включает в отталкивание одну ногу, но его эффективность тоже невысока. Во-первых, ширина и качество лыжни не позволяют технично выполнять движения полуконькового хода; во-вторых, отсутствие лыжной колеи не дает возможности свободно держать направление скользящей лыжи, что мешает эффективному коньковому отталкиванию другой ногой. Можно констатировать факт, что эволюция конькового стиля постепенно изживает полуконьковый способ движения из технического арсенала лыжников и лыжников-ориентировщиков.

Наблюдение за движением сильнейших лыжников-ориентировщиков мира показало, что на быстрых лыжнях они стараются использовать промежуточный вариант между одновременным бесшажным ходом и полуконьковым. Охарактеризовать такой ход сложно. Отсутствие теоретической основы порождает много вариаций его исполнения. Поэтому данные исследования техники движения по быстрым лыжням (ширина лыжни 1.0–1.5 м) были направлены на подробный анализ движения по ним разных спортсменов для получения биомеханических характеристик самого оптимального варианта техники хода по таким лыжням.

Методика исследования

На протяжении нескольких соревновательных сезонов (2000–2004 гг.) проводилось тщательное наблюдение и видеосъемка движения спортсменов на быстрых лыжнях соревновательных дистанций. Многократные измерения длины и времени циклов движения, темпа движения, скорости движения лыжников-ориенти-

ровщиков по быстрым лыжням сопоставлялись с контурами программами, снятыми с видеозаписей. В результате сравнительного исследования и тщательного анализа были определены основные моменты техники лыжного хода в подъемы по быстрым лыжням, который был назван «маятниковым» ходом. Название «маятниковый» было введено благодаря внешнему сходству полного цикла этого хода с движением маятника.

Системно-структурный подход к изучаемым движениям позволил определить в единичном цикле «маятникового» хода фазовую структуру с установлением точных граничных моментов начала и окончания фаз. Для полного представления общей структуры движений «маятникового» хода было условно выделено шесть фаз на основе характерных признаков. «Маятниковый» лыжный ход применяется лыжниками-ориентировщиками при преодолении подъемов разной крутизны. При этом угловые показатели положения звеньев тела лыжника-ориентировщика и инвентаря, а также параметры скорости, времени и длины циклов движения, темпа движения (количества циклов в минуту) изменяются. Поэтому исследованы характеристики и параметры движения на пологом подъеме крутизной 5° и подъеме крутизной 12°.

Параметры техники «маятникового» хода получены экспериментально при исследовании движения этим ходом 20 мастеров спорта по лыжному ориентированию (10 мужчин и 10 женщин). Следует отметить, что исследования проводились на быстрых лыжнях, в хороших условиях скольжения. Другие условия вносят свои поправки в общее время выполнения цикла и продолжительность фаз, а также отрезок дистанции, проходимый за цикл и каждую фазу. Длина фаз измерялась по положению таза спортсменов с использованием цифровой видеокамеры Panasonic Digital.

Для сравнения эффективности «маятникового» хода с одновременным бесшажным и полуконьковым (на узкой лыжне другой альтернативы нет на лыжах для конькового хода) был проведен эксперимент, где регистрировалась скорость передвижения на участке 53 м лыжной трассы при движении в подъем. Ширина и качество лыжни позволяли полноценно продемонстрировать технику всех тестируемых лыжных ходов. Спортсмены по очереди преодолевали подъем разным ходом – одновременным бесшажным, полуконьковым и «маятниковым». Регистрировались скорость и темп движения. В эксперименте участвовали 10 мастеров спорта по лыжному ориентированию (5 мужчин и 5 женщин), овладевшие техникой «маятникового» хода.

Результаты и обсуждение

Движения в цикле конькового хода обычно анализируются с момента окончания отталкивания ногой, после которого следует свободное одноопорное

скольжение. Движения в цикле «маятникового» хода целесообразно изучать с момента начала отталкивания руками, так как эта фаза движения является ключевой и самой продолжительной в цикле хода.

Первая фаза – скольжение на левой лыже с отталкиванием руками (рис. 1). Левая нога согнута в коленном суставе под углом 130° , который практически не зависит от крутизны подъема. Руки согнуты под углом $60\text{--}70^\circ$. Правая нога слегка согнута в коленном суставе под углом 155° , отведена назад и находится на одной прямой с корпусом (подготовлена для махового движения вперед).

Отталкивание руками начинается при постановке палок быстрым движением – «ударом» палками о снег, что снижает давление на лыжи и уменьшает силу трения скольжения. Угол постановки палки на снег $70\text{--}75^\circ$ и не должен быть больше 90° для любого подъема во избежание «натякания» на палки. Отталкивание палками сопровождается одновременным наклоном корпуса вперед и обеспечивает необходимые условия для эффективной работы рук. Это позволяет быстро достичь минимального угла наклона палок ($25\text{--}30^\circ$), при котором горизонтальная (движущая) составляющая силы отталкивания достигает максимального значения.

Маховым движением правой ноги происходит ее поднос к левой ноге и сопровождается одновременным подседанием на обеих ногах. Чем круче подъем, тем глубже подседание. Это видно по изменившимся углам в коленном суставе к началу второй фазы цикла (рис. 2). На пологом подъеме маховое движение сопровождается уменьшением угла на 10° , на крутом подъеме – на 45° . Маховое движение выполняется с ускорением, а затем резким торможением и остановкой правой ноги перед левой на расстоянии стопы.

Вторая фаза – двухопорное скольжение с отталкиванием руками. Начинается постепенное смещение проекции центра масс на правую ногу с одновременной разгрузкой левой ноги. Проекция центра масс лыжника-ориентировщика в этой фазе находится в разном положении между опорами и зависит от крутизны подъема: чем круче подъем, тем смещение происходит быстрее. Одновременно с отталкиванием руками корпус начинает выпрямляться относительно левой ноги. На пологом подъеме это почти незаметно (2°), а на крутом подъеме угол между корпусом и левой ногой увеличивается значительно (на 35°). За счет такой разницы и происходит более быстрое смещение проекции центра масс к правой ноге на крутом подъеме. Отталкивание руками к началу третьей фазы (рис. 3) заканчивается положением палок, когда они вместе с руками составляют почти прямую линию. Корпус к концу фазы значительно выпрямляется.

Третья фаза – свободное двухопорное скольжение. Эта фаза очень короткая и относительно пассив-

ная. Передвижение осуществляется за счет скорости, набранной в результате отталкивания руками. При двухопорном скольжении проекция центра масс тела расположена между опорами, вес тела лыжника-ориентировщика распределен на обе лыжи, хотя и неравномерно. Это дает возможность сохранить устойчивость и снять излишнее напряжение мышц ног и корпуса, который еще выпрямляется. В этой фазе на пологом подъеме компенсируется отставание выпрямления корпуса в предыдущей фазе в сравнении с крутым подъемом, которое здесь поднимается относительно левой ноги на 35° .

По окончании отталкивания руки лишь слегка, в силу инерции и остаточного сокращения мышц, отбрасываются назад-вверх и сразу начинают возвратное движение для выноса палок вперед. К началу четвертой фазы (рис. 4) вес тела сосредоточивается на правой ноге, причем больше на передней части стопы.

Четвертая фаза – одноопорное скольжение на правой лыже. Руки находятся на уровне бедер, слегка согнуты в локтевом суставе. На крутом подъеме угол сгибания больше на 30° , т.е. кисти рук дальше вынесены вперед, чем на пологом. Объясняется это тем, что амплитуда движений руками на крутом подъеме меньше, и в третьей фазе они не отбрасывались за корпус, как на пологом.

Во время этой фазы левая нога выносится вперед-вверх таким образом, что к концу фазы она вынесена вперед на расстояние стопы, и лыжа приподнята над лыжней на высоте $3\text{--}5$ см. В таком положении она готова к выпадку вперед голенью. К концу фазы проекция центра масс тела смещена на пяточную часть правой стопы. Руки согнуты в локтевом суставе на $90\text{--}95^\circ$.

Пятая фаза – отталкивание правой ногой (рис. 5). В этот момент из всего цикла движения положение корпуса наиболее приближено к вертикальной линии. Отталкивание ногой производится в момент остановки правой лыжи. Так как на полотне лыжи отсутствует держащая мазь, отталкивание сопровождается незначительным проскальзыванием опорной лыжи назад. Проскальзывание незначительное благодаря совмещению с отталкиванием смещению проекции центра масс тела вперед за счет резкого выпада левой ноги голенью, в результате которого снижается давление на лыжу. К концу фазы проекция центра масс тела смещается на пяточную часть левой стопы. Руки согнуты в локтевом суставе под углом $90\text{--}95^\circ$.

Шестая фаза – одноопорное скольжение на левой лыже (рис. 6). Фаза начинается с момента отрыва правой ноги от опоры и сопровождается выпадом корпуса в направлении движения левой лыжи. Благодаря этому проекция центра масс тела перемещается с пятки опорной ноги на носок. Руки выносятся вперед-вверх, согнуты в локтевом суставе на 90° (с подготовкой для постановки палок на снег и толчка).

Кисти рук при постановке палок перед толчком находятся не выше уровня глаз.

В табл. 1 представлены параметры техники «маятникового» хода. Данные табл. 1 и контурограммы «маятникового» хода позволяют графически отразить динамику длины фаз (рис. 7) и построить хронограммы цикла хода (рис. 8) на подъемах крутизной 5° и 12°, которые показаны на примере цикла движения мужчин.

Как видно из табл. 1 и рис. 7, 8, разная крутизна подъема вызывает изменения в параметрах техники. При увеличении крутизны подъема на 7° средняя скорость в цикле движения значительно падает, у мужчин на 1.86 м/с. Падение скорости происходит за счет глобального уменьшения длины циклов движения на 65 %. На рис. 7 хорошо видно, что расстояние, преодолеваемое спортсменом за цикл «маятникового» хода, на крутом подъеме становится почти втрое короче, чем на пологом. Это огромная разница. При увеличении крутизны подъема растет доля первых двух фаз (скольжение с отталкиванием палками) в общей длине цикла движения. Если на пологом подъеме за время 1-й и 2-й фаз спортсмен проходит 33 % всего расстояния цикла, то на крутом подъеме – 50 %. В фазах скольжения (3, 4 и 6-й) ситуация меняется: на пологом подъеме преодолевается 60 % длины цикла, а на крутом подъеме – только 42 %. Оставшиеся 7 % длины цикла на пологом подъеме и 8 % на крутом подъеме преодолеваются в отталкивании ногой (5-я фаза).

Результаты сравнения эффективности «маятникового» хода с одновременным бесшажным и полуконьковым (табл. 2) указывают, что при передвижении одновременным бесшажным и полуконьковым ходами спортсмены развивают примерно одинаковые скорости (различия недостоверны). При движении «маятниковым» ходом достоверно ($p < 0.05$) увеличивается скорость движения и уменьшается энергоемкость по количеству циклов движения ($p < 0.01$). Преимущество в скорости «маятниковым» ходом перед одновременным бесшажным и полуконьковым ходами может достигать 0.6 м/с у одного и того же спортсмена, при этом он делает меньше на 3–4 цикла движения.

Выводы

Таким образом, основными движущими силами в цикле «маятникового» лыжного хода являются: отталкивание руками (1-я и 2-я фазы), отталкивание правой ногой (5-я фаза), выпад левой ноги вперед голенью (5-я фаза), выпад корпуса вперед (6-я фаза). Четвертая фаза является подготовительной для отталкивания правой ногой и выпада левой ноги вперед голенью, третья фаза – относительно пассивной. В данном фазовом анализе цикла «маятникового» хода направляю-

щей является левая нога спортсмена. В случае смены направляющей ноги в описании они меняются местами соответственно (левая на правую и наоборот).

Увеличение крутизны подъема неизбежно приводит к укорочению фаз скольжения и менее результативному отталкиванию. Исследования техники «маятникового» хода показали, что повысить импульс силы при отталкивании ногой практически невозможно, так как отсутствие держащей мази на колодке лыжи при минимальном повышении приложения силы от возможного приводит к неизбежному «срыву» (проскальзыванию) лыжи. Компенсировать этот недостаток можно только за счет верхнего плечевого пояса, роль подготовленности которого возрастает при увеличении крутизны подъема.

Овладение техникой движения «маятниковым» ходом позволяет значительно повысить скорость движения на подъемах разной крутизны по быстрым лыжням дистанций лыжного ориентирования.

Таблица 1

Количественные характеристики техники передвижения «маятниковым» ходом в подъем крутизной 5° и 12° (n=20)

Параметр техники передвижения		Группы спортсменов	
		Женщины, мастера спорта (n=10)	Мужчины, мастера спорта (n=10)
1. Средняя скорость в цикле движения, м/с	крутизна подъема 5°	3.62±0.04	4.31±0.09
	крутизна подъема 12°	1.87±0.07	2.45±0.06
2. Длина цикла движения, м	крутизна подъема 5°	3.38±0.02	3.84±0.07
	крутизна подъема 12°	1.20±0.04	1.32±0.03
3. Время цикла движения, с	крутизна подъема 5°	0.94±0.01	0.89±0.02
	крутизна подъема 12°	0.64±0.01	0.54±0.01
4. Темп движения, цикл/мин	крутизна подъема 5°	61 – 68	62 – 80
	крутизна подъема 12°	80 – 103	98 – 110

Таблица 2

Показатели скорости и количества циклов движения при передвижении одновременным бесшажным, полуконьковым и «маятниковым» ходами на подъеме длиной 55 м (n=10)

№ п/п	Способ передвижения на лыжах					
	Одновременный бесшажный ход		Полуконьковый ход		«Маятниковый» ход	
	Скорость, м/с	Кол-во циклов движения	Скорость, м/с	Кол-во циклов движения	Скорость, м/с	Кол-во циклов движения
Мужчины, мастера спорта						
1.	3.3	19	3.2	18	3.8	16
2.	2.5	20	2.2	18	2.6	18
3.	2.1	19	2.2	19	2.9	16
4.	2.5	16	2.4	16	3.0	14
5.	2.8	14	2.7	16	3.5	12
Женщины, мастера спорта						
1.	2.0	17	2.1	18	2.6	16
2.	1.8	23	1.9	21	2.8	18
3.	2.2	22	2.1	22	2.5	21
4.	1.8	24	1.7	23	1.9	22
5.	2.3	21	2.1	18	2.9	16
M±m	2.33 ± 0.16	19 ± 1.0	2.26 ± 0.26	18 ± 1.0	2.8 ± 0.19	16 ± 1.0
Различия по скорости передвижения достоверны p0.05						
Различия по количеству циклов движения достоверны p0.05						
«Маятниковый» ход дает преимущество в скорости движения 22.32 %						
Энергоемкость (количество циклов) снижается на 13.33 %						

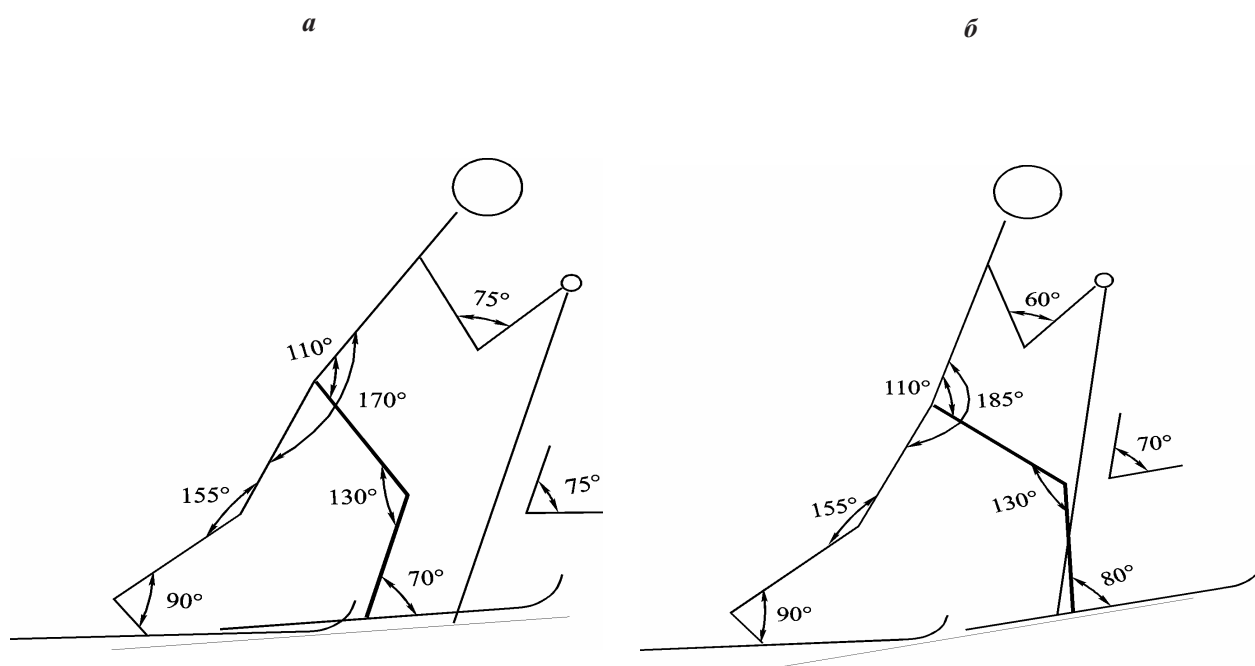


Рис. 1. Контурграмма «маятникового» хода лыжника-ориентировщика в первой фазе движения: а – на подъеме крутизной 5°; б – на подъеме крутизной 12°

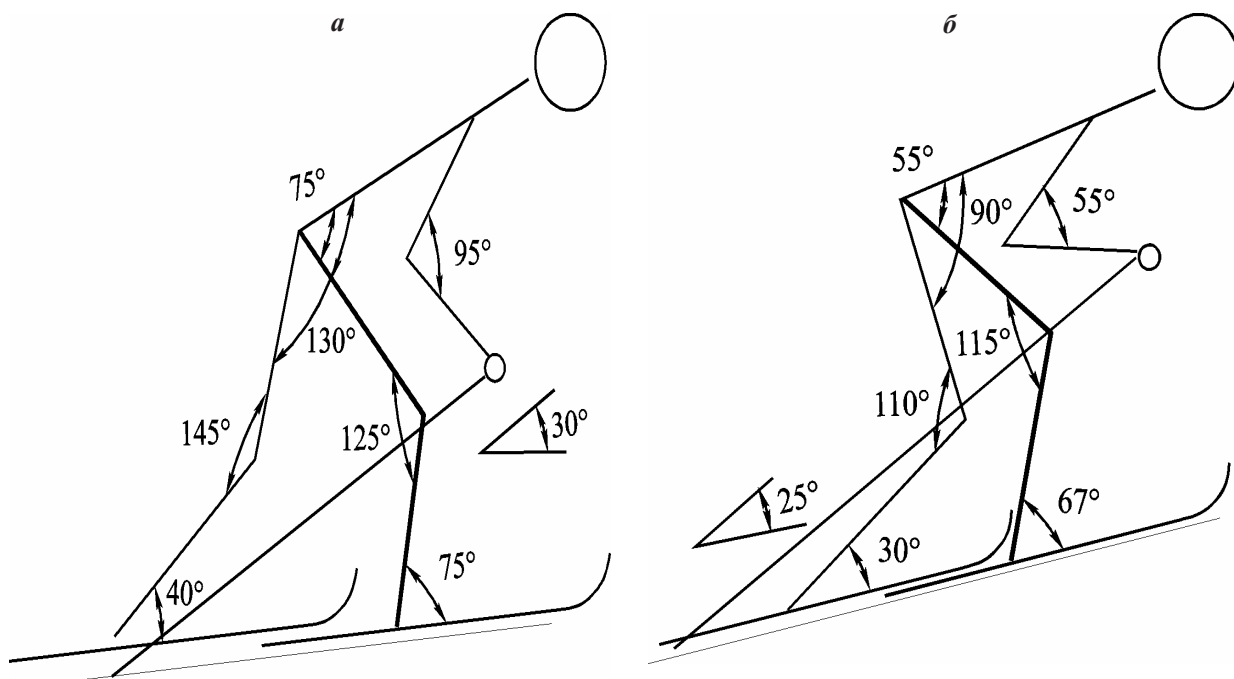


Рис. 2. Контурграмма «маятникового» хода лыжника-ориентировщика во второй фазе движения: а – на подъеме крутизной 5°; б – на подъеме крутизной 12°

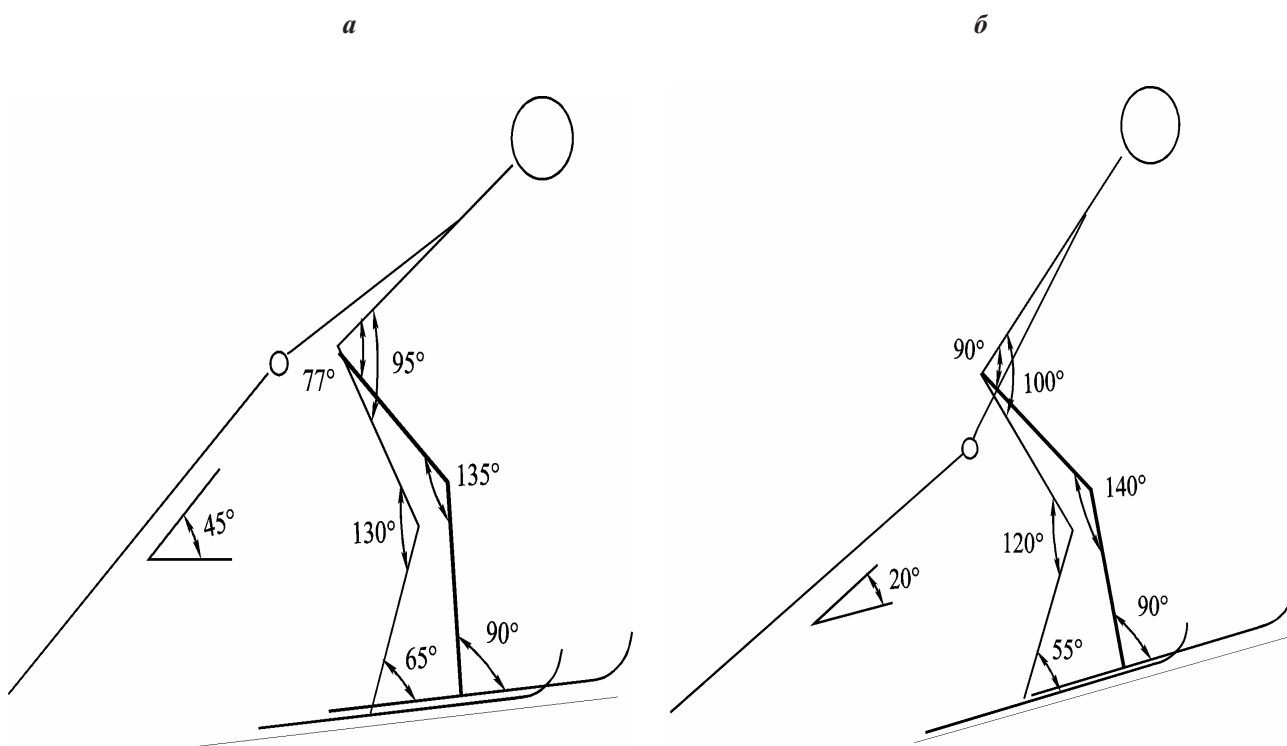


Рис. 3. Контурграмма «маятникового» хода лыжника-ориентировщика в третьей фазе движения: а – на подъеме крутизной 5°; б – на подъеме крутизной 12°

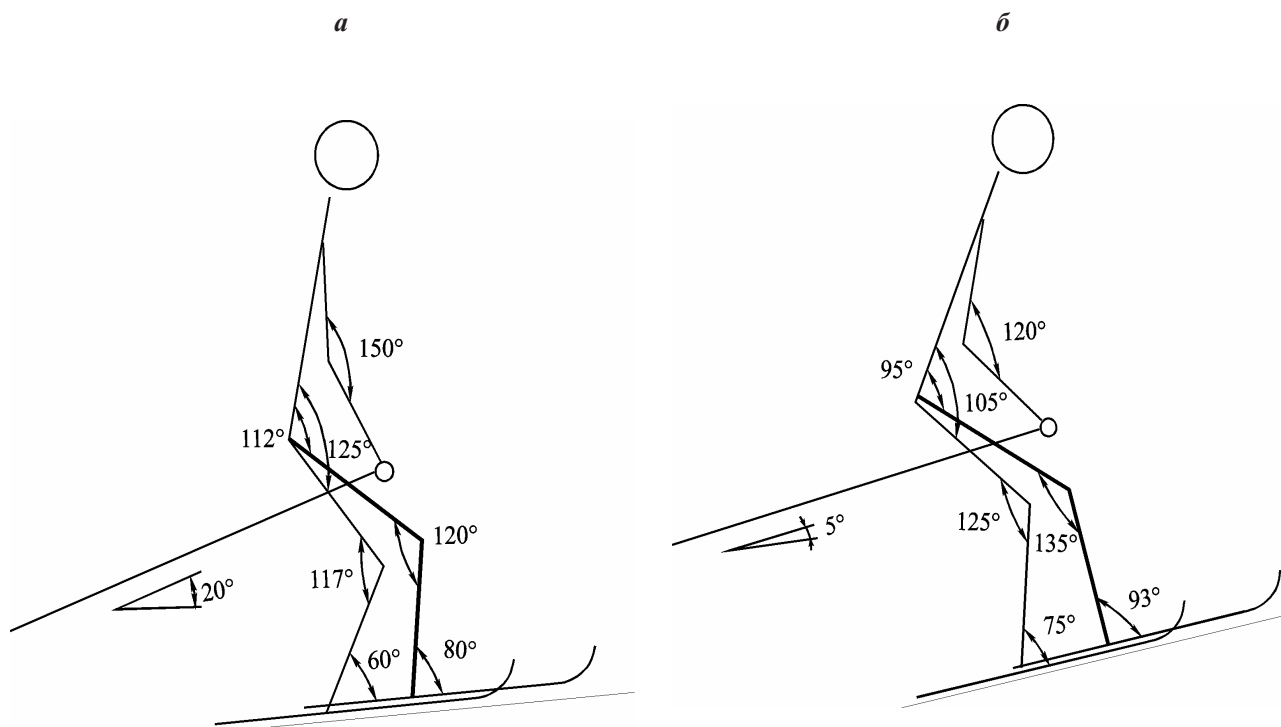


Рис. 4. Контурграмма «маятникового» хода лыжника-ориентировщика в четвертой фазе движения: а – на подъеме крутизной 5°; б – на подъеме крутизной 12°

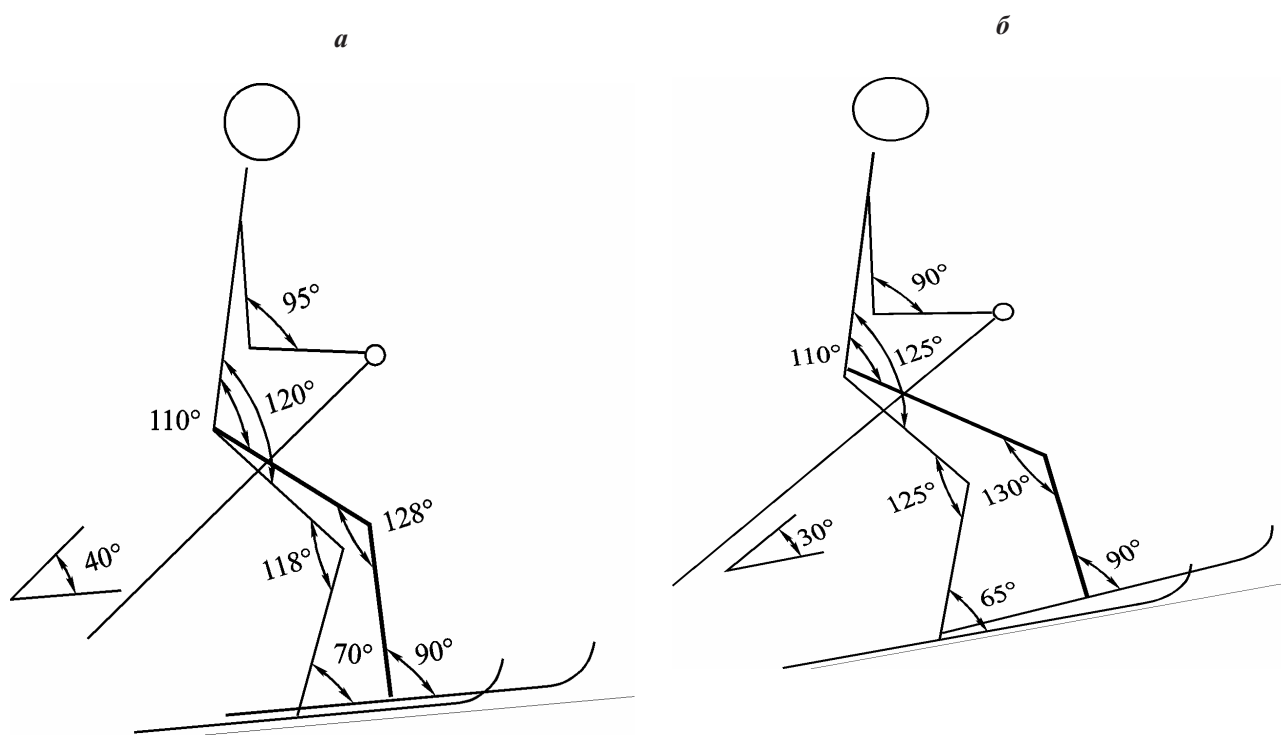


Рис. 5. Контурграмма «маятникового» хода лыжника-ориентировщика в пятой фазе движения: а – на подъеме крутизной 5°; б – на подъеме крутизной 12°

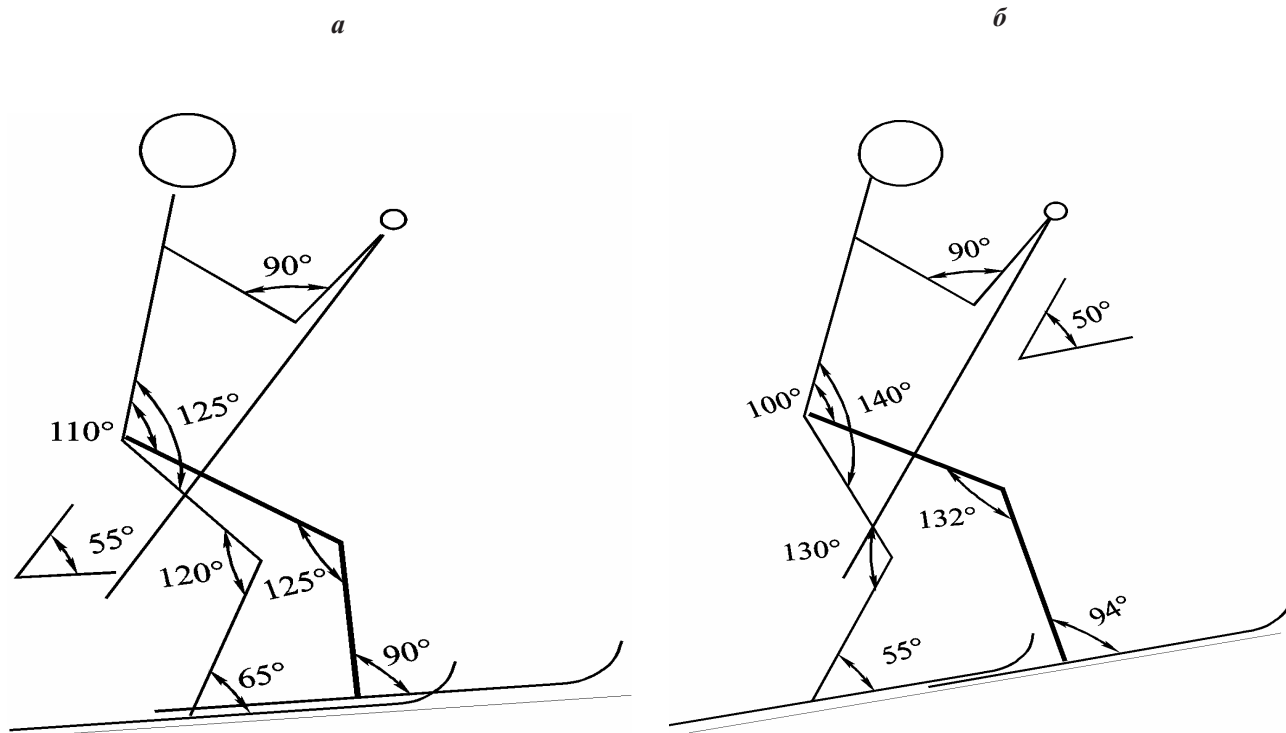


Рис. 6. Контурграмма «маятникового» хода лыжника-ориентировщика в шестой фазе движения: а – на подъеме крутизной 5°; б – на подъеме крутизной 12°

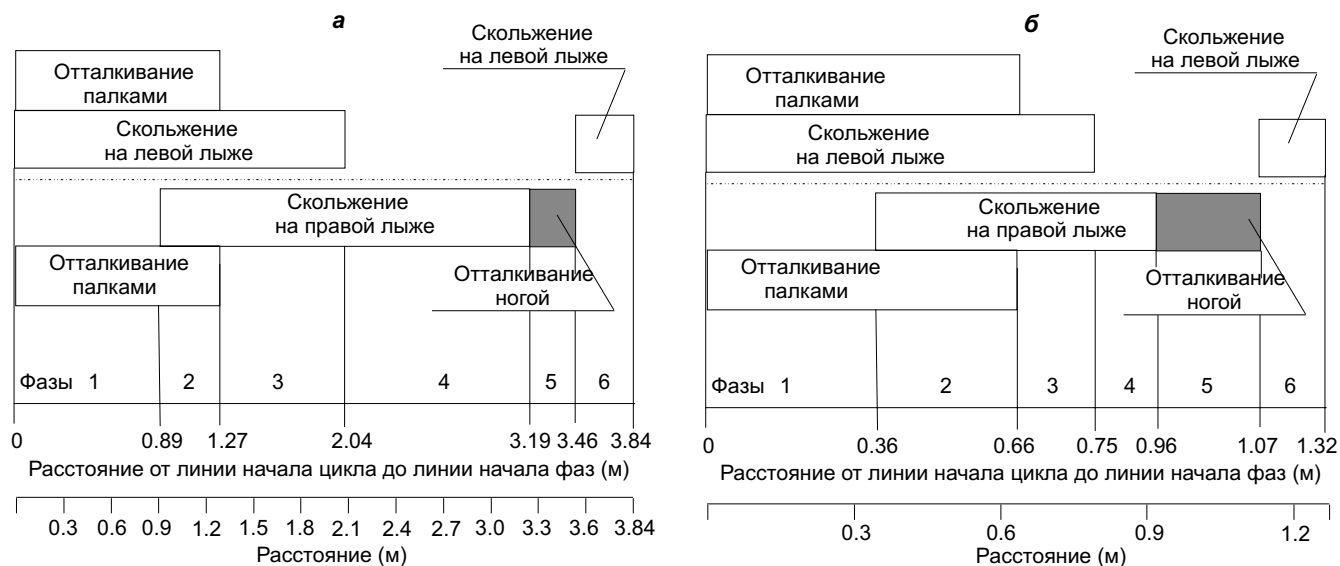


Рис. 7. Показатели длины цикла «маятникового» хода и отдельных его фаз на подъемах разной крутизны у мужчин класса МС:

а – подъем крутизной 5°; б – подъем крутизной 12°

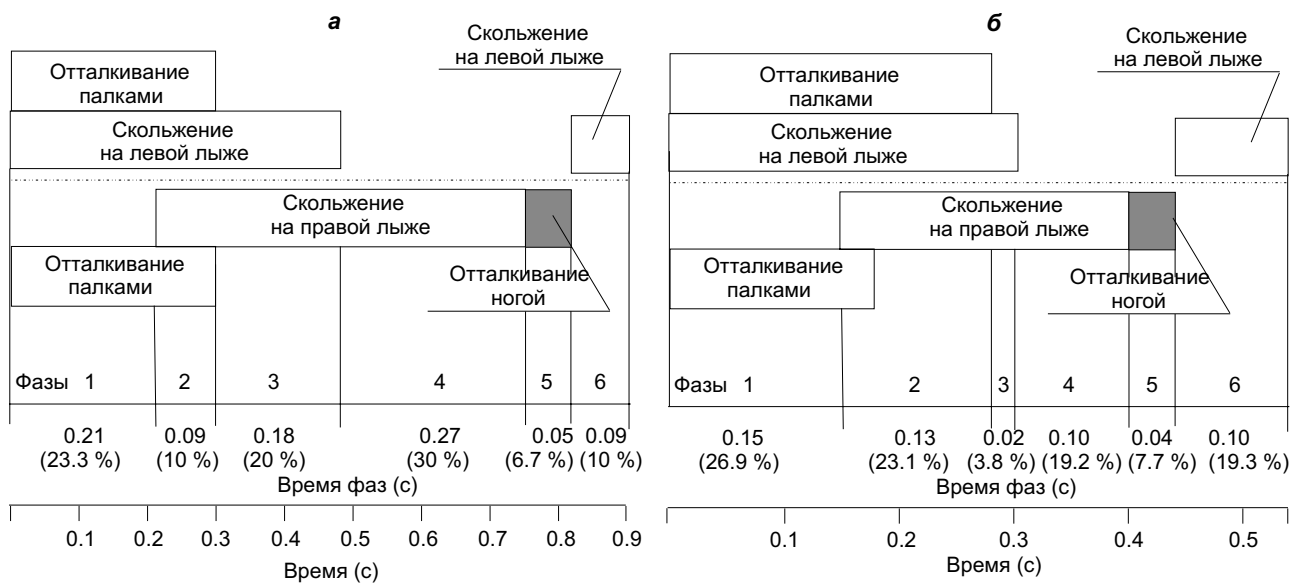


Рис. 8. Хронограммы цикла «маятникового» хода на подъемах разной крутизны у мужчин класса МС:
 а – подъем крутизной 5°; б – подъем крутизной 12°

УДК: 519.872:66.081.6

В.А. Павский, С.А. Иванова

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В МЕМБРАННОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Кемеровский технологический институт пищевой промышленности

Современные мембранные технологии позволяют осуществлять процессы разделения, концентрирования и очистки жидких и газообразных смесей на молекулярном и надмолекулярном уровне. Достоинства мембранных методов заключаются в низких энергозатратах, высокой экономической эффективности, сохранении биологической ценности продуктов.

Главным элементом при мембранном концентрировании является мембрана. Внутри нее, в процессе концентрирования, происходят сложные физико-химические процессы. На поверхности мембраны накапливается вещество за счет того, что его количество, переносимое конвективным потоком к мембране, больше, чем суммарный поток задерживаемого компонента, отводимого от мембраны за счет обратной диффузии и переносимого через нее.

Все это создает определенные трудности в создании математических моделей процесса функционирования мембранного концентрирования.

В настоящее время существует несколько моделей процесса, однако каждая из них обладает определенными недостатками: первая – не учитывает образование и влияние гелевого слоя на поверхности мембраны на процесс концентрирования; вторая – является более фундаментальной и основывается на явлении концентрационной поляризации. Третья модель использует термодинамику необратимых процессов.

Однако эти модели не описывают процесс концентрирования в целом.

Цель работы состоит в том, чтобы создать такую математическую модель процесса мембранного концентрирования, которая бы описывала весь процесс в комплексе.

Для ее построения выделяем наиболее существенные во времени моменты концентрирования, называемые состояниями системы.

Итак, пусть имеется система S , в которой исходный раствор (состояние C_0) поступает в мембранный аппарат (состояние C_1); часть раствора проходит через мембрану, образуя фильтрат (состояние C_3); часть оседает на поверхности мембраны, образуя слой геля (состояние C_4); часть образует поляризационный слой (состояние C_2), который отводится для использования в качестве готового продукта или в качестве исходного раствора на последующих стадиях концентрирования (состояние C_5). По выделенным состояниям C_i составляется размеченный граф.

Переход из состояния C_i в состояние C_j осуществляется скачком, с заданной интенсивностью перехода $\lambda_{ij}(\tau)$, $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $\tau \in [0, \infty)$. Для анализа эффективности работы системы введем базовую характеристику: $p_i(\tau)$ – вероятность того, что в системе в состоянии C_i содержится единичная доля вещества в