ФИЗИКА

УДК 530.145:530.12; 537.8:530.145

О. Д. Азоркина

ТЕХНИКА ПОСТРОЕНИЯ КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНОГО ОДНОПЕТЛЕВОГО ЭФФЕКТИВНОГО ДЕЙСТВИЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЙ НА ДЕФОРМИРОВАННОМ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Работа является кратким обзором применения калибровочно-инвариантных методов построения однопетлевого эффективного действия для суперсимметричных калибровочных моделей, заданных на деформированном $N = 1/2$ суперпространстве. Техника нахождения эффективного действия основана на использовании явно ковариантных методов, таких как метод фонового поля и техника собственного времени, сформулированных на неантикоммутативном суперпространстве. В качестве применения общей конструкции проводится точное вычисление однопетлевого эффективного действия деформированной модели Янга–Миллса.

Ключевые слова: *суперсимметричная теория поля, деформированное суперпространство, неантикоммутативная теория.*

ВВЕДЕНИЕ

Ведущим направлением современной теоретической физики является построение объединенной теории фундаментальных взаимодействий. В качестве основного кандидата на роль объединенной теории рассматривают теорию суперструн [1–4], в основе которой лежит суперсимметрия и идея о том, что фундаментальными объектами природы являются не точечные элементарные частицы, а одномерные протяженные объекты – струны. В 1999 г. Н. Зайберг и Е. Виттен показали, что при наличии постоянного фонового антисимметричного тензорного поля теория суперструн ведет в низкоэнергетическом пределе к четырехмерным полевым теориям в пространстве с некоммутирующими пространственно-временными координатами [5]. Модели некоммутативной теории можно сформулировать в пространстве Минковского. Формулировка и свойства некоммутативных моделей обсуждаются в [6]. В 2003 г. Н. Зайберг [7] установил, что при наличии фонового гравифотонного поля постоянной напряженности [8] теория суперструн имеет в качестве низкоэнергетического предела $D = 4$ суперсимметричную модель в $N = 1$ суперпространстве, в котором половина спинорных координат перестает строго антикоммутировать. Таким образом, введенная деформация нарушает половину всех суперсимметрий теории и поэтому соответствующее суперпространство естественно называть $N = 1/2$ деформированным неантикоммутативным суперпространством. Анализ полевых теорий на деформированном суперпространстве приводит к необходимости замены обычного умножения суперполей на модифицированное произведение, являющееся фермионным вариантом произведения Мойяла и содержащее в своем определении структуру деформации. Открытие новых четырехмерных суперсимметричных моделей делает актуальным вопрос исследования их классических и квантовых аспектов [9–11]. По существу возникло новое направление в теории поля – неантикоммутативная суперсимметричная теория поля. Для интерпретации деформированных теорий как стандартных полевых моделей и для изучения особенностей их динамики необходимо изучение аспектов квантования и перенормируемости теорий с учетом неантикоммутативности. Таким образом, проблема развития методов исследования структуры эффективного действия на деформированном суперпространстве заслуживает специального изучения.

НЕАНТИКОММУТАТИВНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ЯНГА–МИЛЛСА С ПРИСОЕДИНЕНОЙ КИРАЛЬНОЙ МАТЕРИЕЙ

Рассмотрим $N = 1/2$ суперсимметричную теорию поля Янга–Миллса на четырехмерном суперпространстве с явно нарушенной суперсимметрией в антикиральном секторе [7]. Деформация реализуется введением операции неантикоммутативного (но ассоциативного) ★ – произведения суперполей:

$$* \equiv \exp\left\{\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}\overleftarrow{Q}_{\alpha}\overrightarrow{Q}_{\beta}\right\}, \qquad (1)$$

где $Q_{\alpha} = i\dfrac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}$, коэффициент $C^{\alpha\beta} = C^{\beta\alpha}$ – постоянная симметричная матрица, элементами которой являются параметры деформации [12–14].

Динамику киральной скалярной материи в (анти)фундаментальном представлении калибровочной группы [15] описывает действие вида:

$$S_\star = \int d^8 z \bar{\Phi}_f \star e_\star^V \star \Phi_f + \int d^8 z \tilde{\Phi}_{\bar{f}} \star e_\star^{-V} \star \bar{\tilde{\Phi}}_{\bar{f}} + \\ + \int d^6 z \mathcal{W}_\star(\Phi_f, \tilde{\Phi}_{\bar{f}}) + \int d^6 \bar{z} \bar{\mathcal{W}}_\star(\bar{\Phi}, \bar{\tilde{\Phi}}_{\bar{f}}), \quad (2)$$

где Φ и $\tilde{\Phi}$ – киральные суперполя, а $\bar{\Phi}$ и $\bar{\tilde{\Phi}}$ – антикиральные.

В присоединенном представлении калибровочной группы действие для суперполей материи определяется выражением

$$S_\star = \int d^8 z tr(e_\star^{-V} \star \bar{\Phi} \star e_\star^V \star \Phi), \quad (3)$$

где Φ и $\bar{\Phi}$ – киральное и антикиральное суперполя соответственно.

МЕТОД ФОНОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ ДЕФОРМИРОВАННОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим обобщение суперполевого метода фонового поля (см., например, [3] и [16]) на случай неантикоммутативной суперсимметричной теории Янга–Миллса.

Прежде всего определим суперпространственные ковариантные производные в киральном представлении:

$$\nabla_A \equiv (\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \nabla_{\alpha\dot{\alpha}}) = D_A - i\Gamma_A = \\ = (e_*^{-V} * D_\alpha e_*^V, \bar{D}_{\dot{\alpha}}, -i\left\{\nabla_\alpha, *\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\right\}).$$

Суперполевые напряженности W_α и $\overline{W_{\dot{\alpha}}}$ задаются при помощи алгебры деформированных ковариантных производных

$$i\nabla_{\alpha\dot{\alpha}} = \{\nabla_\alpha, *\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\}; \\ \left[\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, *\nabla_{\beta\dot{\beta}}\right] = \varepsilon_{\dot{\alpha}\beta} W_\beta; \quad (4) \\ \left[\nabla_\alpha, *\nabla_{\beta\dot{\beta}}\right] = \varepsilon_{\alpha\beta} \bar{W}_{\dot{\beta}}; \\ \left[\nabla_{\alpha\dot{\alpha}}, *\nabla_{\beta\dot{\beta}}\right] = -i\left(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} f_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta} \bar{f}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\right),$$

где через f обозначено

$$f_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \nabla_{(\alpha} W_{\beta)}.$$

Суперполевые напряженности W и $\bar{W}$ удовлетворяют тождеству Бианки

$$\nabla^\alpha * W_\alpha + \bar{\nabla}^{\dot{\alpha}} * \bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0. \quad (5)$$

Обращаем внимание на то, что в определения суперполей W_α и $\overline{W_{\dot{\alpha}}}$ влючен параметр неантикоммутативности $C^{\alpha\beta}$ за счет $*$ умножения (4).

Совершим фоново-квантовое расщепление калибровочного суперполя V по правилу (см. детали в [16])

$$e_*^V \to e_*^\Omega * e_*^v \quad (6)$$

или

$$e_*^V \to e_*^v * e_*^{\bar{\Omega}},$$

где $\Omega(\bar{\Omega})$ и v – фоновый и квантовый препотенциалы соответственно. Далее используем ковариантные производные в киральном

$$\nabla_\alpha = e_*^{-v} * \nabla_\alpha * e_*^v, \\ \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} = \bar{D}_{\dot{\alpha}}, \quad (7)$$

и антикиральном представлении

$$\nabla_\alpha = D_\alpha, \quad (8) \\ \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} = e_*^v * \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} * e_*^{-v}.$$

Калибровочные преобразования для квантовых составляющих есть:

$$e_\star^V \to e_\star^{i\bar{\Lambda}} \star e_\star^V \star e_\star^{-i\Lambda}; \\ \nabla_A \to e_\star^{i\Lambda} \star \nabla_A \star e_\star^{-i\Lambda}; \quad (9) \\ \nabla_A \to \nabla_A,$$

где Λ и $\bar{\Lambda}$ – два независимых киральный и антикиральный параметра. Фоновые преобразования имеют вид:

$$e_\star^V \to e_\star^{iK} \star e_\star^V \star e_\star^{-iK}, \quad (10) \\ \nabla_A \to e_\star^{iK} \star \nabla_A \star e_\star^{-iK}$$

с вещественным параметром K. Ковариантные киральные и антикиральные суперполя определяются

$$\nabla_\alpha\left(e_\star^{-\Omega} \star \bar{\Phi}\right) = 0, \quad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\left(e_\star^{\bar{\Omega}} \star \Phi\right) = 0 \quad (11)$$

соответственно и расщеплены линейно на фоновую и квантовую составляющие. Затем в действиях для суперполей материи следует провести описанное выше фоново-квантовое расщепление и наложить калибровку только на квантовые суперполя, что отвечает нарушению симметрии относительно преобразований (9). Симметрия относительно фоновых преобразований (10) остается ненарушенной. Результирующее эффективное действие зависит только от фоновых суперполей и автоматически является калибровочно инвариантным. Процедура квантования в неантикоммутативном случае аналогична стандартной ([3, 16]) с учетом замены обычного точечного умножения суперполей на их модифицированное $\star$-произведения.

МЕТОД СОБСТВЕННОГО ВРЕМЕНИ И ζ-ФУНКЦИЯ

Нахождение низкоэнергетического эффективного действия (см., например, [17–20]), описывающего квантовую динамику на достаточно больших (по сравнению с микроскопическими масштабами) расстояниях является важной задачей квантовой теории поля. Пертурбативное рассмотрение эффективного действия осуществляется в рамках петлевого разложения. Первая квантовая поправка отвечает однопетлевому приближению и определяется с помощью функционального детерминанта дифференциального оператора $\hat{H}$, ассоциированного со второй вариационной производной классического действия по его функциональным аргументам на некотором функциональном фоне. Таким образом, возникает необходимость развития техники вычисления функциональных детерминантов, позволяющей находить расходящиеся и конечные части однопетлевого эффективного действия. При этом сохранение явной ковариантности и симметрий исходной теории (в случае отсутствия аномалий) является важным критерием для выбора техники вычислений эффективного действия.

Один из таких способов – это представление однопетлевого действия в виде интеграла по собственному времени

$$i\Gamma^{(1)} = \frac{1}{2} Tr \ln \hat{H} = \ln Det\hat{H} = Tr\int_0^\infty ie^{is\hat{H}} ds. \quad (12)$$

Здесь $Tr\hat{A}$ – функциональный след оператора, $Det\hat{A}$ – функциональный детерминант оператора, а параметр s называется собственным временем. Однопетлевое эффективное действие можно также связать с обобщенной ζ-функцией, отвечающей оператору $\hat{H}$, которая определяется в виде

$$\zeta(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty ds s^{\alpha-1} Tr\left(e^{s\hat{H}}\right), \quad (13)$$

где α – произвольное комплексное число. Покажем, как функциональный детерминант оператора $\hat{H}$ связан с обобщенной ζ-функцией.

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $\hat{H}$

$$\hat{H} h_n = \lambda_n h_n, \quad (14)$$

здесь h_n – собственные функции, а λ_n – соответствующие собственные значения. Детерминант оператора $\hat{H}$ определяется через его собственные значения в виде

$$Det\hat{H} = \prod_n \lambda_n.$$

Введем функцию ζ(α) с помощью собственных значений оператора $\hat{H}$:

$$\zeta(\alpha) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n^\alpha} = tr\left(\hat{H}^{-1}\right)^\alpha. \quad (15)$$

Из (15) следует выражение для производной обобщенной дзета-функции при α = 0

$$\frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = -\ln \prod_n \lambda_n = -Tr \ln \hat{H}. \quad (16)$$

Отсюда получим

$$Det\hat{H} = \exp\left(-\zeta'(\alpha)\right)\big|_{\alpha=0}. \quad (17)$$

Таким образом, нахождение функционального детерминанта сводится к нахождению дзета-функции.

Теперь установим связь метода собственного времени (см., например, [21]) с дзета-функцией. Интегральное представление обратного оператора $\hat{H}^{-1}$ имеет вид

$$\hat{H}^{-1} = i\int_0^\infty ds\, e^{-is\hat{H}} \quad (18)$$

и обобщается на любую степень n обратного оператора

$$\hat{H}^{-n} = \frac{i}{\Gamma(n)}\int_0^\infty ds (is)^{n-1} e^{-is\hat{H}}, \quad (19)$$

здесь $\Gamma(n)$ – гамма-функция Эйлера.

Пусть $z \equiv (x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ – точки суперпространства. Введем функцию

$$U(z, z' \mid s) = e^{-is\hat{H}} \delta^8 (z - z') \equiv \langle z \mid e^{-is\hat{H}} \mid z' \rangle.$$

Не трудно показать, что функция $U(z, z'|s)$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{d}{ds} U(z, z' \mid s) = \hat{H} U(z, z' \mid s).$$

Его решение можно записать в форме

$$U(z, z' \mid s) = e^{-is\hat{H}} \delta(z - z').$$

При замене is на $-\tau$ уравнение Шредингера переходит в обобщенное уравнение теплопроводности. По этой причине функцию $U(z, z'|s)$ называют тепловым ядром. Подставляем соотношение (19) в определение дзета-функции (15) и получаем выражение

$$\zeta(\alpha) = \frac{i}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty ds (is)^{\alpha-1} Tr e^{-is\hat{H}}, \quad (20)$$

где функциональный след определяется так:

$$Tr e^{-is\hat{H}} = \int dz U(z, z' \mid s)\big|_{z=z'}.$$

Вычисляем производную от выражения (20) по α в точке α = 0:

$$\frac{d\zeta(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = -Det\hat{H} = -\int_0^\infty \frac{ds}{is} tr e^{-is\hat{H}}. \quad (21)$$

Сравнивая соотношения (21) и (12), видим, что однопетлевая поправка в эффективное действие определяется производной от дзета-функции

$$\Gamma^{(1)} = -\left(\frac{d}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \zeta(\alpha). \quad (22)$$

Таким образом, вычисление сводится к решению уравнения теплопроводности и к нахождению теплового ядра в совпадающих точках $z = z'$. Метод собственного времени является удобной техникой вычисления, поскольку сохраняет симметрии классической теории. Разложение же по степеням собственного времени позволяет легко выделить расходимости эффективного действия.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНОПЕТЛЕВОЙ КВАНТОВОЙ ПОПРАВКИ ДЛЯ ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА В ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Рассмотрим действие суперсимметричной теории поля Янга–Миллса с киральной материей

(2) на деформированном $N = 1/2$ суперпространстве в отсутствие фоновых киральных и антикиральных суперполей. Производим стандартное расщепление полей на фоновую и квантовую составляющие и определяем квадратичную по квантовым полям часть классического действия

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}\int d^4x\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\left(\bar{\Phi}_c^T \Phi_c^T\right)\hat{H}_\star \star \begin{pmatrix}\Phi_c \\ \bar{\Phi}_c\end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Здесь матричный оператор $\hat{H}_\star$ имеет вид:

$$\hat{H}_\star = \begin{pmatrix} \nabla^2 \star \bar{\nabla}^2 & \bar{m}\nabla^2 \\ m\bar{\nabla}^2 & \bar{\nabla}^2 \star \nabla^2 \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

где «массивные» параметры m и $\bar{m}$ определяются следующим образом

$$m = \mathcal{W}''_{\Phi\Phi}(\Phi), \qquad (25)$$
$$\bar{m} = \bar{\mathcal{W}}''_{\bar{\Phi}\bar{\Phi}}(\bar{\Phi}).$$

Следуя приведенной выше технике собственного времени и методу фонового поля, получаем следующее выражение для дзета-функции:

$$\zeta(\varepsilon\,|\,H) = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\int_0^\infty ds\, s^{\varepsilon-1} e^{-m\bar{m}s} \times$$
$$\times\int d^6z W_\star^2 \frac{\cos(sN)-1}{(sN)^2}\frac{s^2(N^2-\bar{N}^2)}{\cos(aN)-\cos(s\bar{N})}, \qquad (26)$$

которая после непосредственных вычислений сводится к виду

$$\Gamma^{(1)} = (-1)\frac{1}{(4\pi)^2}\left[\int d^6z W_\star^2 \ln\frac{m\bar{m}}{\Lambda^2} + \int d^6\bar{z}\bar{W}_\star^2 \ln\frac{m\bar{m}}{\Lambda^2}\right] +$$
$$+\frac{1}{(4\pi)^2}\int_0^\infty ds\, s\exp(-m\bar{m}s)\int d^8z W_\star^2 \star \bar{W}_\star^2 \zeta_\star(sN, s\bar{N}), \qquad (27)$$

однопетлевой квантовой поправки в эффективное действие для теории поля Янга–Миллса индуцированной материей в фундаментальном представлении. Здесь функция $\zeta_\star(sN, s\bar{N})$ имеет вид [22]:

$$\zeta_\star(x,y) = \frac{y^2 \star (\cos_\star x - 1) - x^2 \star (\cos_\star y - 1)}{x^2 \star y^2 \star (\cos_\star x - \cos_\star y)}. \qquad (28)$$

Таким образом, получен конечный однопетлевой вклад в калибровочное инвариантное эффективное действие на абелевом фоне калибровочноого суперполя постоянной напряженности (все тонкости вычисления приведены в работе [15]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развита техника построения калибровочного инвариантного однопетлевого эффективного действия для суперсимметричных калибровочных теорий, заданных на $N = 1/2$ суперпространстве. Для вычислений предложенны явно ковариантные методы (фонового поля и собственного времени), сформулированные на неантикоммутативном суперпространстве. Найден конечный однопетлевой вклад в калибровочное инвариантное эффективное действие на абелевом фоне калибровочноого суперполя постоянной напряженности.

Список литературы

1. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. М.: Мир, 1990. Т. 1. 518 с.; Т. 2. 656 с.
2. Весс Ю., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. М.: Мир, 1986. 180 с.
3. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M. Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or a Walk Through Superspace. IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1998. 656 p.
4. Вест П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию. М.: Мир, 1983. 328 с.
5. Seiberg N., Witten E. String Theory and Noncommutative Geometry // Journal of High Energy, Physics. 1999. Vol. 9909. P. 032–132.
6. Szabo R. J. Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces // Physical reports. 2003. Vol. 378. P. 201–299.
7. Seiberg N. Noncommutative Superspace N = 1/2 Supersymmetry, Field Theory and String Theory // Journal of High Energy, Physics. 2003. Vol. 0306. P. 010–029.
8. De Boer J., Grassi P. A., van Nieuwenhuizen P. Non-commutative superspace from string theory // Physics Letter B. 2003. Vol. 574. P. 098–104.
9. Azorkina O. D., Banin A. T., Buchbinder I. L., Pletnev N. G. Generic chiral superfield model on nonanticommutative N = 1/2 superspace // Modern Physics Letters A. 2005. Vol. 20. P.1423–1436.
10. Азоркина О. Д. Классические и квантовые аспекты общей модели кирального-антикирального суперполей на деформированном суперпространстве // Вестн. Том. гос. пед. ун-та. 2006. № 6 (57). С.39–45.
11. Азоркина О. Д. Суперполевые методы исследования деформированных неантикоммутативных моделей // Вестн. Том. гос. пед. ун-та. 2012. № 7 (122). С. 40–48.
12. Weyl H. Quantum mechanics and group theory // Zeitschrift fur Physik. 1927. Vol. 46. P. 001–262.
13. Wigner E. P. Quantum corrections for thermodynamics equilibrium // Physics Review. 1932. Vol. 40. P. 749–756.
14. Moyal J. E. Quantum mechanics as a statistical theory // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1949. Vol. 45. P. 099–124.
15. Azorkina O. D., Banin A. T., Buchbinder I. L., Pletnev N. G. One-loop effective potential in N = 1/2 generic chiral superfield model // Physics Letters B. 2006. Vol. 635. P. 50–55.

16. Gates S. J., Grisary M. T., Rocek M., Siegel W. Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. Benjamin Cummings, Reading, M.A. 1983. 548 p.
17. Де Витт Б. С. Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987. 288 с.
18. De Witt B. Quantum theory of gravity II. The manifestly covariant theory // Physical Review. 1967. Vol. 162. P. 1195–1239.
19. Buchbinder I. L., Odintsov S. D., Shapiro I. L. Effective Action and Quantum Gravity. IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1992. 413 p.
20. B. de Witt B. S. Relavity, Group and Topology II. B. S. De Witt and R. Stora (Eds.), Elsevier, Amsterdam, 1984. 381 p.
21. Fock V. A. The proper time in classical and quantum mechanics // Izvestiya of USSR Academy of Sciences, Physics. 1937. N. 4, 5. P.554–568.
22. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., Tseytlin A. A. One low-energy effective actions in N=2, N=4 superconformal theories in four-dimensions // Physical Review D. 2000. Vol. 62. P. 045001–045019.

Азоркина О. Д., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры.
Томский государственный педагогический университет.
Ул. Киевская 60, г. Томск, Россия, 634061.
E-mail: azorkina@tspu.edu.ru

Материал поступил в редакцию 19 03.2013.

O. D. Azorkina

CONSTRUCTION OF GAUGE INVARIANT ONE-LOOP EFFECTIVE ACTION IN SUPERSYMMETRIC THEORIES ON DEFORMED SUPERSPACE

We briefly review a gauge-invariant approach to calculating the one-loop effective action for supersymmetric gauge models formulated on $N = 1/2$ superspace. Construction of the effective action is based on use of manifestly covariant methods such that superfield background field method and proper time technique in non-anticommutative superspace. As the applications of general construction, the calculation of one-loop effective action for deformed supersymmetric Yang-Mills model is carried out.

Key words: *effective action, supersymmetric field theory, non-anticommutative theory, deformed superspace.*

Tomsk state pedagogical university.
Ul. Kievskay 60, Tomsk, Russia, 634061.
E-mail: azorkina@tspu.edu.ru