УДК 372.851

Р. З. Абасов

РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ИНТЕРВАЛОВ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ С МОДУЛЕМ

В данной работе на основе геометрической интерпретации модуля числа предлагается методика об эффективном применении метода интервалов для решения уравнений и неравенств с модулем некоторых типов.

Ключевые слова: *метод интервалов, уравнение с модулем, обобщение, рациональное решение, неравенство с модулем.*

В школьной программе математики метод интервалов давно известен как один из способов решения некоторых типов уравнений и неравенств. В работах [1–5] рассматривается возможность рационализации и расширения области применения этого метода. Но главный вопрос в применении метода интервалов остается открытым: как определить промежутки, в которых находятся корни данного уравнения (или решения неравенств), как только числовая прямая разделится на части известным способом, не повторяя однообразные аналогичные вычисления, характерные этому методу. Ясно, что этот вопрос более актуален, когда в уравнение (или в неравенство) входит параметр. Тогда спрашивается: какая будет зависимость между решением и параметром?

Понятно, что анализ этих вопросов избавит школьника от таких малоэффективных и утомительных вычислений, как поиск решений на каждом промежутке числовой оси отдельно, и повысит уровень его логического мышления [6–8] о рациональном применении свойств функций к решению уравнений и неравенств.

Учитывая эти вопросы, в данной работе на основе геометрической интерпретации модуля числа и других соображений предлагается методика об эффективном применении метода интервалов для решения уравнений и неравенств с модулем некоторых типов. В этом смысле выражение $|x - a|$ будем рассматривать как расстояние $AX = |x - a|$ на координатной прямой между точками $A(a)$ и $X(x)$. Нам понадобится функция

$$y = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|, \qquad (1)$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ – вещественные числа. Для наименьшего значения этой функции в [6] найдена формула:

$$y_{\min} = \left[\begin{array}{ll} (a_{2m} - a_1) + (a_{2m-1} - a_2) + \ldots + (a_{m+1} - a_m) & \\ \qquad\qquad \text{при} \quad n = 2m, & (2) \\ (a_{2m+1} - a_1) + (a_{2m} - a_2) + \ldots + (a_{m+2} - a_m) & \\ \qquad\qquad \text{при} \quad n = 2m+1. & (3) \end{array}\right.$$

Доказательство этой формулы основывается на другом («алгебраическом») определении модуля, т. е.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{при} \quad a < 0, \end{cases}$$

и, по нашему мнению, выглядит нерационально. Сначала изложим другое, более простое доказательство формулы (2), (3), основываясь на элементарных свойств линейной функции $y = kx + b$, учитывая при этом, как проходит эта прямая при $k > 0$ или $k < 0$, а так же, как меняется ее положение при $k \to +\infty$ или $k \to -\infty$. Для этого на координатной прямой отметим числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда координатная прямая разделится на $n + 1$ интервала:

$I_1 = (-\infty, a_1]$, $I_2 = (a_1, a_2]$, …, $I_n =$
$= (a_{n-1}, a_n]$, …, $I_{n+1} = (a_n, +\infty)$.

Ясно, что в каждом интервале $I_r (r = \overline{1, n+1})$ функция (1) линейная с конкретным угловым коэффициентом k. А точнее, $k = n$ в I_{n+1}, $k = n - 2$ в I_n и т. д. (каждый раз с переходом на предыдущий интервал k уменьшается на две единицы). Учитывая непрерывность функции (1), а также вышесказанное о линейной функции $y = kx + b$, легко получить характер изменения этой функции в зависимости от $n = 2m$ или $n = 2m + 1$ (соответственно рис. 1 и 2).

В случае $n = 2m$ для каждого $x \in [a_m, a_{m+1}]$ функция (1) постоянна ($k = 0$) и имеет наименьшее значение (2), а в случае $n = 2m + 1$ эта функция имеет наименьшее значение (3) при $x = a_{m+1}$. В этой точке отрезки ломаной перпендикулярны, так как $k = -1$ в I_{m+1} и $k = 1$ в I_{m+2}.

Теперь можно сделать некоторые выводы о решении уравнения

$$|x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n| = a, \qquad (4)$$

где a – параметр:

1) уравнение не имеет корней, если $a < y_{\min}$ (см. (2) и (3));

2) в случае $a < y_{\min}$ любое число $x \in [a_m, a_{m+1}]$ является корнем этого уравнения, если $n = 2m$, а

если $n = 2m + 1$, то оно имеет единственный корень $x = a_{m+1}$;

3) и наконец, уравнение имеет два корня, если $a > y_{\min}$.

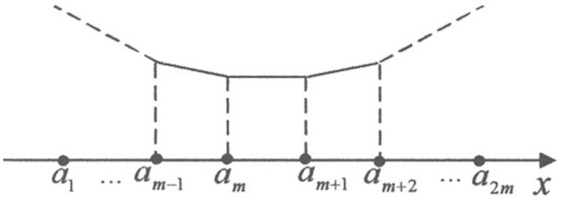

Рис. 1

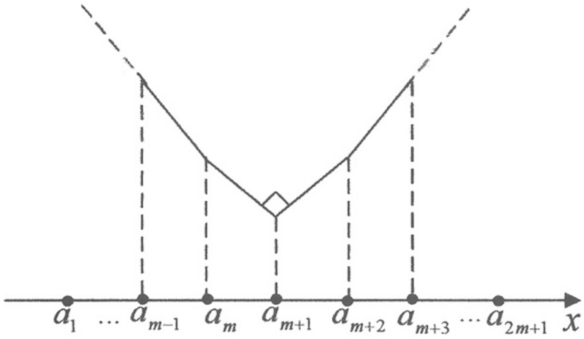

Рис. 2

Для конкретности рассмотрим частный случай уравнения (4), т. е. уравнение

$$|x - a_1| + |x - a_2| = a, \tag{5}$$

где $a_1 < a_2$, a – параметр. Если

$$y = |x - a_1| + |x - a_2|,$$

то по формуле (2) $y_{\min} = a_2 - a_1$, и это значение достигается при каждом $x \in [a_1, a_2]$. Впрочем этого результата можно добиться и с учетом того, что модуль – это расстояние. Пусть $A(a_1)$, $B(a_2)$ заданные, а $X(x)$ произвольная точка на координатной прямой. При каждом $x \in [a_1, a_2]$ $|x - a_1| + |x - a_2| = AX + XB = AB = a_2 - a_1$, а для $x \notin [a_1, a_2]$ $|x - a_1| + |x - a_2| > a_2 - a_1$. Поэтому $y_{\min} = a_2 - a_1$. Как уже сказано, при $a = y_{min} = a_2 - a_1$ любое значение $x \in [a_1, a_2]$ является корнем уравнения (5), а при $a > y_{\min}$ это уравнение имеет два корня x_1 и x_2 (рис. 3).

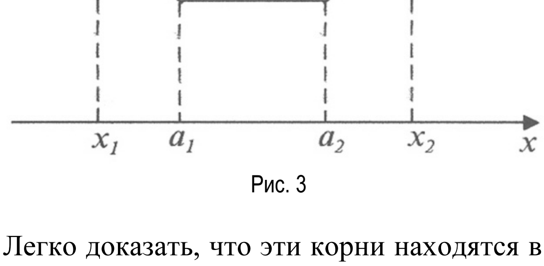

Рис. 3

Легко доказать, что эти корни находятся в интервалах $(-\infty, a_1)$ и $(a_2, +\infty,)$ на равных расстояниях от точек a_1 и a_2 соответственно. Действительно, пусть

$$h = \frac{a - y_{\min}}{2} > 0.$$

Проверим, что $x_1 = a_1 - h \in I_1$ является корнем уравнения (5):

$$a_1 - (a_1 - h) + a_2 - (a_1 - h) = a \Rightarrow 2h + y_{\min} =$$
$$= a \Rightarrow h = \frac{a - y_{\min}}{2}.$$

Таким же путем можно проверить, что число $x_2 = a_2 + h \in I_3$ является вторым корнем этого уравнения. В таком случае уравнение

$$|x - 2| + |x + 4| = 10,$$

где $a_1 = -4$, $a_2 = 2$, $a = 10 \Rightarrow y_{\min} = 6$, $h = (10 - 6)/2 = 2$ будет иметь корни $x_1 = -4 - 2 = -6$, $x_2 = 2 + 2 = 4$. Ясно, что при $a < 6$ это уравнение корней не имеет, а если $a = 6$, то каждое число $x \in [-4; 2]$ является его корнем.

Теперь рассмотрим уравнение

$$|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| = a, \tag{6}$$

где $a_1 < a_2 < a_3$. Из (3) следует, что функция $y = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3|$ имеет $y_{\min} = a_3 - a_1$. При $a > y_{\min}$ уравнение (6) имеет два корня, которые могут находиться в разных промежутках $I_n (n = \overline{1, 4})$. Теперь мы займемся вопросом о нахождении тех промежутков, где находятся эти корни, а также формулы для их вычисления.

Итак, $a > y_{\min} = a_3 - a_1$ и пусть $h = a - y_{\min} > 0$. Обозначим

$$r = \min\{a_2 - a_1, a_3 - a_2\},$$

$$R = \max\{a_2 - a_1, a_3 - a_2\}.$$

Для определенности предположим, что $a_2 - a_1 > a_3 - a_2$. Тогда $r = a_3 - a_2$, $R = a_2 - a_1$ (в случае $a_2 - a_1 \le a_3 - a_2$ проводятся аналогичные рассуждения). В этом случае можно доказать:

1) если $0 < h < r$, то легко проверить, что уравнение (6) имеет два корня $x_1 = a_2 - h \in I_2$, $x_2 = a_2 + h \in I_3$ (рис. 4).

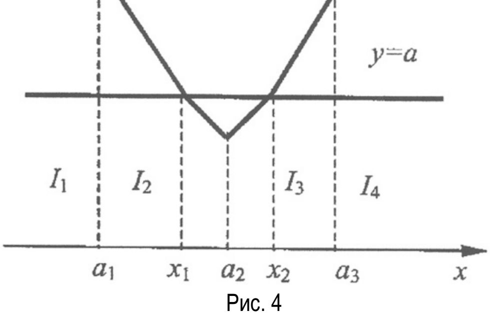

Рис. 4

В этом плане уравнение

$|x-1|+|x+3|+|x-4|=8,$

где $a=8$, $y_{\min}=4-(-3)=7$, $h=1<r=4-1=3$, имеет корни $x_1=1-1=0$, $x_2=1+1=2$;

2) если $h=r=a_3-a_2$, то $x_1=a_2-h=2a_2-a_3\in I_2$, $x_2=a_2+h-a_3$;

3) если $r<h<R$, то $x_1=a_2-h\in I_2$, $x_2=a_3+h'\in I_4$, где $h'=(h-r)/3$;

4) если $h=R=a_2-a_1$, то $x_1=a_1$, $x_2==a_3+h'\in I_4$;

5) и наконец, если $h>R$, то $x_1=a_1-h''\in I_1$, $x_2=a_3+h'\in I_4$, где $h''=(h-R)/3$. К этому случаю приводится уравнение

$|x-1|+|x+3|+|x-4|=12,$

где $x_1=-3-\dfrac{5-4}{3}=-3\dfrac{1}{3}$, $x_2=4+\dfrac{5-3}{3}=4\dfrac{2}{3}$.

И наконец, рассмотрим уравнение

$$|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+|x-a_4|=a, \qquad (7)$$

где $a_1<a_2<a_3<a_4$. Левая часть имеет $y_{\min}=a_4-a_1+a_3-a_2$ (см. (2)), и функция принимает это значение в каждом $x\in[a_2,a_3]$. Обозначим

$r=\min\{a_2-a_1,a_4-a_3\}$,

$R=\max\{a_2-a_1,a_4-a_3\}$.

Для определенности предположим, что $r=a_2-a_1$, $R=a_4-a_3$. Нас интересует случай $a>y_{\min}$. При $a=y_{\min}$ каждый x из $[a_2,a_3]$ является корнем уравнения (7), а когда $a<y_{\min}$, это уравнение корней не имеет. Пусть $h=(a-y_{\min})/2>0$. В этом случае корни уравнения (7) (как и корни уравнения (5)) постепенно удаляются от отрезка $[a_2,a_3]$ влево и вправо в зависимости от значения h. Здесь возможны следующие варианты:

1) $0<h<r\Rightarrow x_1=a_2-h\in I_2$, $x_2=a_3+h\in I_4$;

2) $h=r\Rightarrow x_1=a_2-r=a_1$, $x_2=a_3+r==a_3+a_2-a_1\in I_4$;

3) $r<h<R\Rightarrow x_1=a_1-\dfrac{h-r}{2}\in I_1$, $x_2=a_3+h\in I_4$;

4) $h=R\Rightarrow x_1=a_1-\dfrac{R-r}{2}\in I_1$, $x_2=a_3+R=a_4$;

5) $h>R\Rightarrow x_1=a_1-\dfrac{h-r}{2}\in I_1$, $x_2=a_4+\dfrac{h-R}{2}\in I_5$.

Приведем один пример. В силу, например, пункта 3 уравнение

$|x-1|+|x+3|+|x-4|+|x-9|=24,$

где $a=24$; $y_{\min}=15$; $h=4{,}5$; $R=5$ имеет корни:

$$x_1=-3-\frac{4{,}5-4}{2}=-3\frac{1}{4},\ x_2=4+4{,}5=8{,}5.$$

Уравнения рассмотренного типа, когда число слагаемых в левой части больше четырех, решаются аналогично. Как видно, эти уравнения имеют специальный вид, т. е. левая часть состоит из суммы модулей, а коэффициенты неизвестного 1. В дальнейших исследованиях уравнения будут иметь более общий вид. При этом нам понадобится следующая лемма.

Наименьшее значение функции

$Y=|k_1x-b_1|+|k_2x-b_2|$ $(k_1>0,k_2>0)$

выражается формулой

$$y_{\min}=\min(k_1,k_2)\left|\frac{b_2}{k_2}-\frac{b_1}{k_1}\right|.$$

Доказательство. Перепишем данную функцию в виде

$$y=k_1\left|x-\frac{b_1}{k_1}\right|+k_2\left|x-\frac{b_2}{k_2}\right| \qquad (8)$$

и для определенности предположим, что в $b_1/k_1<b_2/k_2$. Возможны следующие случаи:

1) если $k_1<k_2$, то функцию (8), записав в виде

$$y=k_1\left(\left|x-\frac{b_1}{k_1}\right|+\left|x-\frac{b_2}{k_2}\right|\right)+(k_2-k_1)\left|x-\frac{b_2}{k_2}\right|$$

по геометрическому смыслу модуля (а также по формуле (3)), можно утверждать, что при любом значении $x\in\left[\dfrac{b_1}{k_1},\dfrac{b_2}{k_2}\right]$ выражение

$$\left|x-\frac{b_1}{k_1}\right|+\left|x-\frac{b_2}{k_2}\right|$$

принимает свое наименьшее значение $\dfrac{b_2}{k_2}-\dfrac{b_1}{k_1}$.

В частности, примем $x=b_2/k_2$, тогда и второе слагаемое $(k_2-k_1)\left|x-\dfrac{b_2}{k_2}\right|$ получает свое наименьшее значение, равное нулю. Значит, при $x=b_2/k_2$

$$y_{\min}=k_1\left(\frac{b_2}{k_2}-\frac{b_1}{k_1}\right); \qquad (9)$$

2) если $k_1=k_2=k$, то легко получим

$$y_{\min}=k\left(\frac{b_2}{k}-\frac{b_1}{k}\right)=b_2-b_1;$$

3) если $k_1>k_2$, то записав данную функцию в виде

$$y=k_2\left(\left|x-\frac{b_1}{k_1}\right|+\left|x-\frac{b_2}{k_2}\right|\right)+(k_1-k_2)\left|x-\frac{b_1}{k_1}\right|,$$

принимая $x=b_1/k_1$, получим

$$y_{\min} = k_2\left(\frac{b_2}{k_2} - \frac{b_1}{k_1}\right). \qquad (10)$$

Из (9) и (10) имеем формулу

$$y_{\min} = \min(k_1, k_2)\left(\frac{b_2}{k_2} - \frac{b_1}{k_1}\right),$$

а в общем случае – формулу (если не примем условие $b_1/k_1 < b_2/k_2$)

$$y_{\min} = \min(k_1, k_2)\left|\frac{b_2}{k_2} - \frac{b_1}{k_1}\right|,$$

что и требовалось доказать.

Учитывая эту лемму, утверждаем, что уравнение

$|3x + 1| + |4x - 5| = a$,

где $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $y_{\min} = 3\left|\frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right| = 4\frac{3}{4}$, не имеет корней, если $a < 4\frac{3}{4}$, имеет единственный корень $x = \frac{b_2}{k_2} = \frac{5}{4}$, если $a = 4\frac{3}{4}$, и, наконец, имеет два корня, если $a > 4\frac{3}{4}$. Ясно, что проверка этих утверждений обычным методом интервалов связана с большими вычислениями и выглядит нерационально.

Аналогичными рассуждениями для функции

$y = |k_1x - b_1| + |k_2x - b_2| + |k_3x - b_3|$,

где $k_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) и $b_1/k_1 < b_2/k_2 < b_3/k_3$, получим следующее:

1) если $k_1 \le k_3$, $k_3 - k_1 \le k_2$, то

$$y_{\min} = b_3 - b_1 + \frac{k_1 - k_3}{k_2} b_2 .$$

В частности, $y_{\min} = b_3 - b_1$, если $k_1 = k_3$. Эти значения достигаются при $x = b_2/k_2$;

2) если $k_1 < k_3$, $k_3 - k_1 \ge k_2$, то

$$y_{\min} = \frac{k_1 + k_2}{k_3} b_3 - b_1 - b_2.$$

В частности, $y_{\min} = b_3 - b_1 - b_2$, если $k_3 - k_1 = k_2$, и эти значения достигаются при $x = b_3/k_3$;

3) если $k_1 > k_3$, $k_3 - k_1 \le k_2$, то

$$y_{\min} = b_3 - b_1 + \frac{k_1 - k_3}{k_2} b_2$$

(как в п. 1), и при этом можно считать $x = b_2/k_2$;

4) если $k_1 > k_3$, $k_1 - k_3 \ge k_2$, то

$$y_{\min} = b_2 + b_3 - \frac{k_2 + k_3}{k_1} b_1.$$

В частности, $y_{\min} = b_2 + b_3 - b_1$, $k_1 - k_3 = k_2$, и это значение получается при $x = b_1/k_1$.

На основе этих результатов можно сделать соответствующие выводы о числе корней уравнения

$|k_1x - b_1| + |k_2x - b_2| + |k_3x - b_3| = a$.

Таким же образом можно исследовать и другие функции (а также соответствующие уравнения) рассмотренного типа, когда число слагаемых в левой части больше трех. Но, как видно, и такие уравнения имеют некоторый специальный вид – левая часть состоит только из суммы модулей. Поэтому на следующем этапе рассмотрим уравнение более общего вида

$$\pm |k_1x - b_1| \pm |k_2x - b_2| \pm \ldots \pm |k_nx - b_n| = kx + b, \qquad (11)$$

где $k_i > 0$, ($i = 1, \overline{n}$). Здесь будем применять другой способ, поскольку вышеизложенный подход здесь неприменим. Запишем это уравнение в виде

$F(x) = 0$,

и предположим, что $b_1/k_1 < b_2/k_2 < \ldots < b_n/k_n$. Нанесем эти значения точками на числовую прямую. В результате числовая прямая разделится на $n + 1$ промежутка. Ясно, что на каждом из этих промежутков функция $F(x)$ линейная, и поэтому ее график на каждой такой части есть отрезок. Вычислим значения функции $F(x)$ в отмеченных точках и обозначим $F(b_i/k_i) = F_i (i = \overline{1, n})$. Кроме того, в каждом из интервалов $(-\infty, b_1/k_1)$ и $(b_n/k_n, +\infty)$ выбираем по одной удобной точке и найдем значение функции $F(x)$ в этих точках. Их обозначим как F_* и F^* соответственно. Учитывая непрерывность функции $F(x)$ и построив схематический график этой функции по найденным значениям, можем найти те промежутки, где находятся корни данного уравнения (если они есть). Для примера рассмотрим уравнение

$|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$.

На числовой оси отметим числа 1, 2, 3 – нули модулей и найдем значения функции $F(x) = |x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| - 4$ в этих точках: $F(1) = F(2) = 0$, $F(3) = -4$. Дополнительно найдем $F(4) = -2 > -4$ ($x = 4$ произвольное значение в $(3, +\infty)$). Анализ показывает, что отрезок $[1; 2]$ полностью является решением этого уравнения и в интервале $(4; +\infty)$ находится еще один корень x^* (рис. 5). Ученик легко найдет этот корень обычным способом. Но ему будет интересно найти x^* из подобия треугольников ADC и BEC:

$$\frac{x^* - 3}{4} = \frac{x^* - 4}{2} \Rightarrow x = 5.$$

Из рис. 5 также следует способ решения неравенств соответствующего типа.

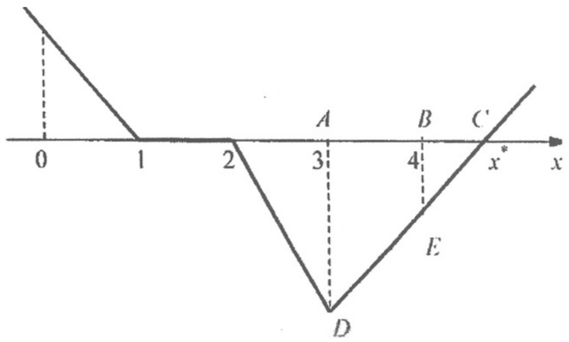

Рис. 5

Например, неравенство

$|x-1|-2|x-2|+3|x-3|>4$

имеет решение $(-\infty;\,1)\cup(5;\,+\infty)$ (учитываем, что $F(0)=2>0$), а неравенство

$|x-1|-2|x-2|+3|x-3|>4$

имеет решение [1; 5]. В некоторых случаях уравнение (11) решается проще в том смысле, что точное значение функции $F(x)$ в некоторых точках деления $x_i=b_i/k_i$ можно и не находить. На конкретных примерах рассмотрим следующие варианты. Например, для решения уравнения

$$|x+1|+|2x-3|+|x-6|+2|x-2|+|x+5|+ \\ +|x|=12x+3 \qquad (12)$$

легко заметить, что во всех интервалах числовой оси функция $F(x)$ линейная с отрицательным угловым коэффициентом, т. е. $F(x)$ убывает на всей числовой прямой. Поэтому уравнение (12) имеет единственный корень. Поскольку $F(0)=22$ и $F(1{,}5)=-2$, то этот корень находится в интервале (0; 1,5). Мы сразу можем написать решение соответствующих неравенств $F(x)>0$ или $F(x)<0$, как только найдем этот единственный корень.

То, что значения функции $F(x)$ достаточно вычислить в определенных точках, можно доказать и по другим соображениям. Поскольку левая часть в (12) больше нуля, то и $12x+3>0$ или $x>-1/4$, т. е. в точках -5 и -1 (точки деления) значения $F(x)$ не нужны (см. [2]).

Это замечание играет существенную роль при решении более сложных задач. Например, для решения уравнения

$|2x^2-3|+|3x^2-4x+1|+|x-1|-2x=-3,$

запишем его в виде

$|2x^2-3|+|3x^2-4x+1|+|x-1|=2x-3.$

Для существования корней этого уравнения должно выполняться необходимое условие $2x-3>0$ или $x>1{,}5$. А тогда все выражения, находящиеся в модулях, положительны, и поэтому данное уравнение запишется в виде $x^2-x=0$, которое не имеет корней, удовлетворяющих условию $x>1{,}5$.

Для эффективного решения некоторых задач предложенные выше способы иногда применяются одновременно в синтезе. Например, уравнение

$|x+2|+|x+4|+|x-2{,}5|-|x-7|+|x-5|=3,$

записав в виде

$|x+2|+|x+4|+|x-2{,}5|+|x-5|=3+|x-7|$

согласно формуле (2), для левой части имеем $y_{\min}=13{,}5$, и поэтому для существования корней должно выполняться необходимое условие $3+|x-7|\geq 13{,}5$, отсюда $x\leq -3{,}5$ или $x\geq 17{,}5$. А это уточняет, на каких промежутках следует искать корни этого уравнения. Аналогичными рассуждениями можно решать более сложное уравнение

$|x+3|+|x-4|+|x-5|+|x|=12-\sin^2 x,$

которое имеет два корня $x_1=0$ и $x_2=\pi$, поскольку левая часть имеет $y_{\min}=12$ (при $\forall x\in[0,\,4]$) и для существования решений должно выполняться условие $\sin x=0$ ($x\in[0,\,4]$).

Учитывая, что для уравнения

$|x-a_1|-|x-a_2|=a,\ (a_1<a_2)$

левая часть имеет $y_{\min}=a_1-a_2$, $y_{\max}=a_2-a_1$ (рис. 6), то его решение определяется следующим образом:

$$x=\begin{cases}\forall x\in(-\infty,a_1]\ \text{при}\ a=a_1-a_2;\\ \dfrac{a+a_1+a_2}{2}\in(a_1,\,a_2),\ \text{при}\ a\in(a_1-a_2,a_2-a_1);\\ \forall x\in[a_1,\infty)\ \text{при}\ a=a_2-a_1.\end{cases}$$

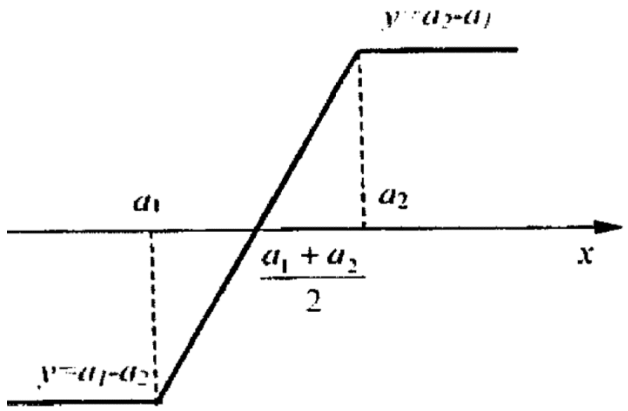

Рис. 6

Из рис. 6 также без труда можно найти решение неравенства $|x-a_1|-|x-a_2|>a$ ($<a$) при разных значениях параметра a, где сначала находим корень соответствующего уравнения.

Список литературы

1. Абасов Р. З. О методе интервалов // Изв. АГПУ, Баку. 1998. № 5 (на азерб. языке). С. 53–64.
2. Василевский А. Б. Упражнения по алгебре и началам анализа. Минск: Народная асвета, 1991. 224 с.
3. Дорофеев Г. В. О задачах с параметрами, предлагаемых на вступительных экзаменах в вузы // Математика в школе. 1983. № 4. С. 36–41.
4. Затакавай В. Решение неравенств методом интервалов // Квант. 1990. № 5. С. 63–67.
5. Матвеев В. Н. Использование методов интервалов при решении неравенств некоторых типов // Математика в школе. 1970. № 6. С. 36–37.
6. Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады. М.: Мир, 1978. 338 с.
7. Липатникова И. Г., Паршина Т. Ю. Формирование когнитивной компетентности будущих учителей математики в процессе обучения курсу «Элементарная математика» // Вестн. Том. гос. пед. ун-та. 2012. № 11 (126). С. 32–37.
8. Червонный М. А., Власова А. А., Швалёва Т. В., Цвенгер Е. И. Разработка модели современного педагогического образования // Вестн. Том. гос. пед. ун-та. 2013. № 4 (132). С. 14–18.

Абасов Р. З., кандидат физико-математических наук, доцент.
Азербайджанская государственная нефтяная академия, профессор РАЕ.
Пр-т Азадлыг, 20, г. Баку, Республика Азербайджан, AZ1010.
E-mail: Rahib-55@mail.ru

Материал поступил в редакцию 16.01.2013.

R. Z. Abasov

THE RATIONAL VARIANT OF INTERVALS METHOD IN SOLVING SOME TASKS WITH MODULE

The considered theme is not studied properly in the school programme of mathematics. So many questions on this topic are still open. In this paper we offered on effective technique for applying the method of intervals for solving equations and inequalities with a module of some types based on the geometrical interpretation of the number's module.

Key words: *method of intervals, equation with module, generalization, efficient solution, inequality with module.*

Azerbaijan State Oil Academy
Pr. Azadlyg, 20, Baku, Respublika Azerbaijan, AZ 1107.
Email: Rahib-55@mail.ru