УДК 532+536

Э.Р. Абанеев, Е.А. Козлов

ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУХМЕРНОЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ РАСЧЕТНОЙ ОБЛАСТИ

Томский государственный университет

Исследование газодинамических и теплообменных задач в областях с изменяющейся геометрией имеет важное научно-практическое значение в связи с тем, что подобные задачи широко распространены как в технологических процессах промышленности, так и в сфере эксплуатации ракетной техники.

Старт ракеты из шахты представляет собой интересный и наглядный пример задачи, в которой сопрягаются вопросы построения эффективной расчетной сетки, теплообменные процессы, газодинамика и аэродинамика. Цель данной статьи – пример решения части этой задачи, а именно построение расчетной сетки и решение нестационарной газодинамической задачи в двухмерной постановке. Для решения этой задачи используется численный метод С.К. Годунова [1].

Рассматривалась следующая картина физических процессов. В начальный момент времени область расчета (рис. 1) заполнена неподвижным газом при давлении $P_н$ и температуре $T_н$ и имеет свободный объем $V_н$. После запуска ракетного двигателя высокотемпературные продукты сгорания поступают в пространство между телом ракеты и шахты. С этого момента ракета остается неподвижной до тех пор, пока давление в шахте не поднимется до значения, после которого осуществляется раскупорка и ракета начинает свое движение. Схема расчетной модели приведена на рис.1.

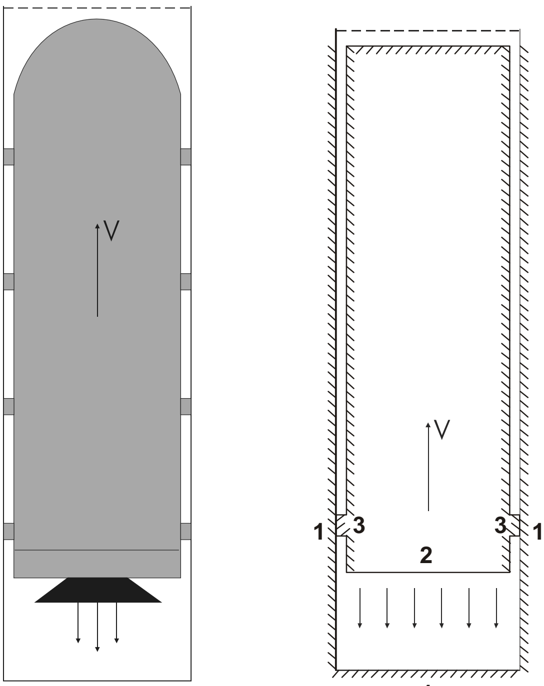

Рис. 1

Физические допущения:

1) считаем, что газ – идеальный и несжимаемый, т.е. описываемый уравнениями Эйлера;

2) пренебрегаем тепловым взаимодействием между газом и стенками шахты;

3) пренебрегаем трением между стенками шахты и конструкционными элементами ракеты;

4) считаем, что между стенками шахты и конструкцией ракеты не существует свободного пространства для прохода газов.

Исходя из этих допущений в указанной области решаются двухмерные уравнения газовой динамики, которые в интегральной форме имеют вид

$$\iint \vec{\sigma}\, dxdy + \vec{a}\, dydt + \vec{b}\, dtdx = 0,$$

$$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ e \end{bmatrix}, \vec{a} = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ p + \rho u_x^2 \\ \rho u_x u_y \\ (e+p)u_x \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y \\ p + \rho u_y^2 \\ (e+p)u_y \end{bmatrix},$$

$$e = \rho\left(\frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho} + \frac{u_x^2 + u_y^2}{2}\right), \tag{1}$$

где ρ, u_x, u_y, p – плотность, проекции скорости и давление газа; k – показатель адиабаты. В (1) интегралы следует понимать как поверхностные интегралы второго рода, т.е. как интегралы по ориентированной поверхности.

Граничные условия. На стенках шахты (границы 1 и 3 на рис.1) задаются условия непротекания

$$(\vec{u}, \vec{n}) = 0, \tag{2}$$

где $\vec{n}$ – единичная нормаль к указанным границам.

На границе 2 в качестве граничного условия задавались параметры потока газа – массовая скорость m и значение полной энтальпии h:

$$m = \rho(\vec{u}, \vec{n}),$$
$$h = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + \frac{u_x^2 + u_y^2}{2}. \tag{3}$$

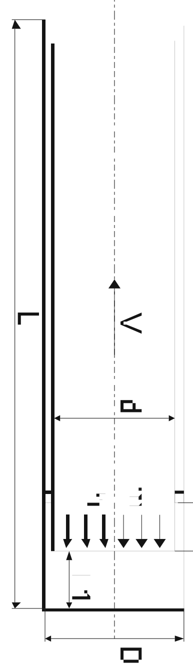

Рис. 2

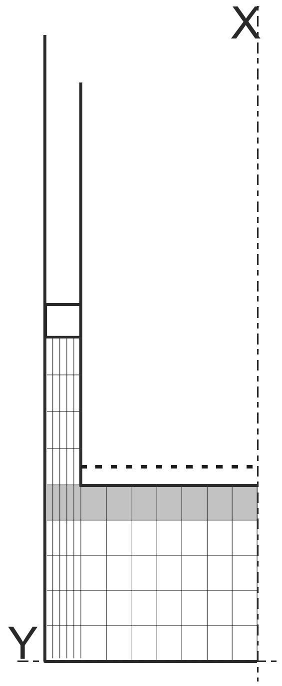

Рис. 3

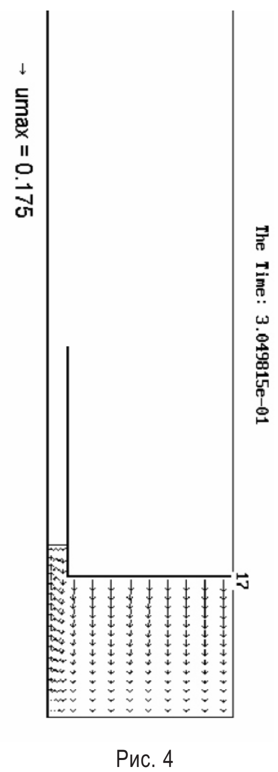

Рис. 4

Если граница подвижна (как в случаях 2 и 3), то скорость N = $(\vec{u},\vec{n})$ заменяется на (N – V), где V – скорость движения границы.

Используемые исходные данные: диаметр шахты D = 2.3 м; диаметр ракеты d = 2.1 м; расстояние от дна ракеты до дна шахты L1 = 0.3 м; расстояние от дна ракеты до конструкционного элемента ракеты L2 = 0.2 м; высота шахты L = 11.7 м; масса ракеты M = 50 000 кг.

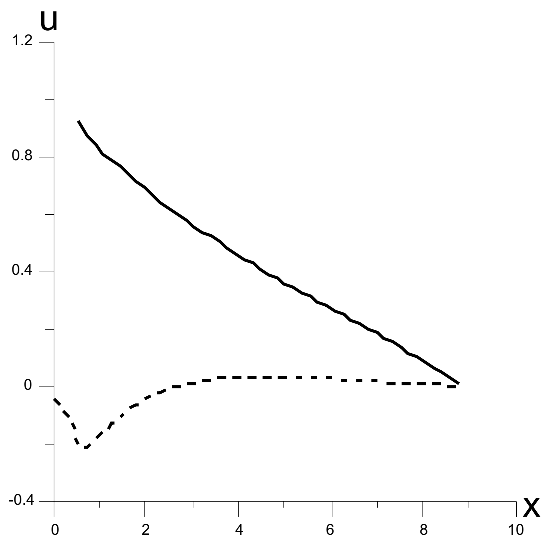

Рис. 5

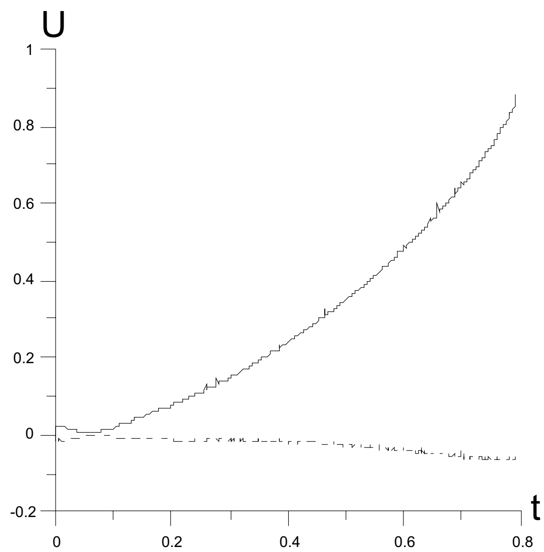

Рис. 6

Поток массы, приходящий через сопла в нижней части ракеты, изменяется с течением времени и имеет значения, заданные для определенных моментов времени. Для уточнения значения потока массы в другие моменты времени можно интерполировать исходные данные.

Важную роль в удачном расчете поставленной задачи играет правильное построение расчетной сетки. В нашем случае при разбиении области в направлении оси Y мы будем руководствоваться соображениями о том, что наибольший интерес представляют области вблизи стенок и уступов, и осуществим там сгущение. В направлении оси X – равномерное разбиение. В результате расчетная сетка выглядит как показано на рис. 3.

При движении ракеты возникает необходимость добавления новых ячеек. Данное обстоятельство привело к разработке следующего алгоритма. При движении ракеты граничные ячейки, отмеченные на рисунке серым цветом, начинают растягиваться в сторону движения. При достижении ширины ячеек полуторного размера от исходного происходит добавление новых ячеек путем деления данных ячеек. Деление осуществляется следующим образом: ячейки, которые станут внутренними, делаются по ширине размера шага по X, принятого во всей области расчета, а граничные ячейки получают оставшийся размер. При этом параметры из внутренней ячейки переносятся в граничную. В расчетную схему при расчете в данных граничных ячейках добавляется учет изменения объема граничных ячеек.

Результаты расчетов выводились в режиме реального времени на экран компьютера в виде распределений плотности, скоростей и давления по расчетной области, а также поля вектора скорости.

Из полученных результатов видно, что в области стенки шахты возникает возвратное течение, которое устремлено в направлении движения ракеты и осуществляет свой разворот в области между шахтой и ракетой. Зависимость скорости u_x от координаты X показана на рис. 5. Сплошная линия – скорость в центральной части шахты, пунктир – у стенки.

Кроме того, получив зависимости скорости и давления от времени, отмечаем некоторые осцилляции периодического характера. По нашему мнению, данные осцилляции не имеют физической природы и порождаются особенностями схемы, а именно алгоритмом добавления новых ячеек. Зависимость скорости от времени изображена на рис. 6. Сплошная кривая – скорость в центральной части шахты, пунктир – у стенки.

Литература

1. Годунов С.К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., 1976.

УДК 33: 303.7

Ф.Ф. Идрисов, М.Р. Рустамов

О КОРРЕКТНОСТИ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГНОЗА В ЭКОНОМИКЕ

Томский государственный педагогический университет

Во многих задачах экономического анализа используются линейные модели прогнозирования параметров и показателей исследуемых объектов (например корпораций). Однако эффективность таких моделей во многом определяется их чувствительностью к ошибкам в исходных статистических данных. В данной работе предлагается новый критерий оптимальности подобных моделей и доказывается их более высокая толерантность.

Пусть имеется случайный процесс *X(t)*, представляющий собой некоторый параметр или показатель экономической природы. Необходимо предсказать его значение в момент времени $(t+\tau_0)$. Прошлые значения процесса заданы в моменты времени $(t-\Delta i),\ i=\overline{0,n}.$ Функция корреляции $K_x(\tau)$ предполагается известной. $\widehat{X}(t+\tau_0)$ – оценка действительного значения экономического показателя $X(t+\tau_0)$ и задается в виде (для простоты рассмотрим прогноз в режиме авторегрессии):

$$\hat{X}(t+\tau_0)=\sum_{i=0}^{n}a_iX(t-i\Delta), \qquad (1)$$

здесь *n* – глубина памяти, τ_0 – время предсказания.

Вектор $A=\{a_0,a_1,...,a_n\}$ определяется из условия:

$$\min_{\{a_i\}}J_1=\min_{\{a_i\}}M\left\{\left[X(t+\tau_0)-\sum_{i=0}^{n}a_iX(t-i\Delta)\right]^2\right\} \qquad (2)$$

Предсказывающий фильтр (*ПФ*), оптимальный по минимуму среднеквадратичной ошибки (*СКО*), необходимо сравнить в смысле корректности по Адамару с *ПФ*, оптимальным по минимуму функции корреляляции ошибок (*ФКО*):

$$\min_{\{b_i\}}J_2=\min_{\{b_i\}}M\left\{\left[X(t+\tau_0)-\sum_{i=0}^{n}b_iX(t-i\Delta)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[X(t+\tau_0+m)-\sum_{i=0}^{n}b_iX(t-i\Delta+m)\right]\right\}. \qquad (3)$$

Запишем критерий *СКО* в следующем виде:

$$J_1=M\left\{\left[X(t+\tau_0+m)-\sum_{i=0}^{n}a_iX(t-i\Delta)\right]^2\right\}=$$
$$=K_x(0)-2\sum_{i=0}^{n}a_iK_x(\tau_0+i\Delta)+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_ia_jK_x[(i-j)\Delta]. \qquad (4)$$

Условие минимума, как легко проверить, запишется в виде

$$\sum_{j=0}^{n}K_x[(i-j)\Delta]a_j=K_x(\tau_0+i\Delta),\ i=\overline{0,n} \qquad (5)$$

или в векторной форме:

$$K(0)A=C(0), \qquad (6)$$

где *K*(0) – матрица с элементами $K_x[(i-j)\Delta]$, *C*(0) – вектор с компонентами $K_x(\tau_0+i\Delta),\ i,j=\overline{0,n}$.