В.М. Кац, К.И. Лившиц

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСХОДАМИ НА РЕКЛАМУ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Томский государственный университет

Свободный капитал страховой компании может быть, в частности, направлен на привлечение новых клиентов (рекламу). Это, с одной стороны, интенсифицирует поступление денежных средств в компанию, а другой – увеличивает количество страховых выплат и отвлекает часть средств собственно на рекламу. Поэтому возникает задача исследования влияния рекламных расходов на характеристики деятельности страховой компании, в частности на ее средний капитал.

Предположим, что в отсутствии расходов на рекламу функционирование страховой компании описывается классической моделью [1]. Страховые премии поступают непрерывно, так что за время Δt капитал компании увеличивается на величину $C_0\Delta t$, страховые выплаты – независимые случайные величины со средним значением a, моменты страховых возмещений образуют пуассоновский поток интенсивности λ.

Пусть в момент времени t капитал компании равен $S(t)$ и в промежутке $[t, t+\Delta t]$ на привлечение новых клиентов расходуется часть капитала $u(t)S(t)\Delta t$, где $0 \le u(t) \le u_0 \le 1$. При $u_0 << 1$ можно считать, что скорость поступления страховых выплат в компанию должна увеличиваться на величину, пропорциональную $u(t)S(t)$. Однако затраты на рекламу не могут, во-первых, дать эффект ранее чем через некоторое время τ, а во-вторых, обладают эффектом последействия, т.е. после прекращения расходов на рекламу она еще некоторое время продолжает действовать. Поэтому введем функцию $R(t)$, связанную с $S(t)$ соотношением [2, 3]

$$k\frac{dR}{dt} = -R(t) + u(t)S(t),$$

и будем считать, что расходы на рекламу приводят к тому, что скорость потока страховых премий увеличивается с величины C_0 до величины $C_0 + C_1R(t-\tau)$. Однако с увеличением числа клиентов компании увеличивается и число страховых случаев. Поэтому интенсивность потока страховых выплат должна увеличиться с величины λ_0 до некоторой $\lambda_0 + \lambda_1 R(t-\tau)$. Если нагрузка страховой премии остается постоянной, то величины C_0, C_1, λ_0, λ_1 связаны соотношением

$$\frac{C_0}{\lambda_0} = \frac{C_1}{\lambda_1}.$$

Откуда процесс изменения среднего капитала компании $\overline{S}(t)$ будет описываться уравнениями

$$\begin{gathered}\frac{d\overline{S}(t)}{dt} = -u(t)\overline{S}(t) + (C_0 - \lambda_0 a) + \\ +(C_1 - \lambda_1 a)R(t-\tau), \\ k\frac{dR(t)}{dt} = -R(t) + u(t)\overline{S}(t)\end{gathered} \qquad (1)$$

с начальными условиями $S(0) = S_0$ и $R(t) = 0$ при $t \in [-\tau, 0]$.

Цель страховой компании состоит в том, чтобы, выбирая рекламную стратегию $u(t)$, максимизировать критерий качества

$$I = \int_0^{\tau} \rho(t)\overline{S}(t)dt,$$

где $\rho(t)$ – не отрицательная, монотонно возрастающая функция. При $\rho = \exp(-\delta(T-t))$, где δ – коэффициент дисконтирования, максимизируется средний капитал за время T, при $\rho(t) = \delta(t-\tau)$ – капитал в некоторый момент времени T и т.д.

Получившаяся оптимизационная задача может быть решена с использованием принципа максимума для систем, описываемых уравнениями с запаздывающим аргументом [4]. Введем функцию $I(t)$ соотношением

$$\frac{dI(t)}{dt} = \rho(t)\overline{S}(t)$$

и, обозначая

$$\gamma = C_1 - \lambda_1 a,\ x_1(t) = \frac{S(t)}{C_0 - \lambda_0 a},\ x_2(t) = \frac{R(t)}{C_0 - \lambda_0 a},$$

$$x_3(t) = \frac{S(t)}{C_0 - \lambda_0 a}, \qquad (3)$$

сведем поставленную задачу к стандартной форме. Необходимо максимизировать $x_3(T)$, где переменные $x_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{dx_1(t)}{dt} = -u(t)x_1(t) + \gamma x_2(t-\tau) + 1, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{k}x_2(t) + \frac{1}{k}u(t)x_1(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = \rho(t)x_1(t)\end{gathered} \qquad (4)$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_{10}$, $x_3(0) = 0$, $x_2(t) = 0$ при $t \in [-\tau, 0]$.

Функция Гамильтона [4] для нашей задачи имеет вид

$$H = P_1(t)\left[-u(t)x_1(t)+\gamma x_2(t-\tau)+1\right]+$$
$$+P_2(t)\left[-\frac{1}{k}x_2(t)+\frac{1}{k}u(t)x_1(t)\right]+$$
$$+P_3(t)\rho(t)x(t), \qquad (5)$$

где сопряженные переменные $P_i(t)$ определяются на отрезке $[T-\tau, T]$ системой уравнений

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \left[P_1(t)-\frac{1}{k}P_2(t)\right]u(t)-$$
$$-P_3(t)\rho(t),$$
$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{1}{k}P_2(t), \qquad (6)$$
$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0$$

с граничными условиями $P_1(T) = 0$, $P_2(T) = 0$, $P_3(T) = 1$, а на отрезке $[0, T-\tau]$ системой уравнений

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \left[P_1(t)-\frac{1}{k}P_2(t)\right]u(t)-$$
$$-P_3(t)\rho(t),$$
$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}-\left.\frac{\partial H}{\partial x_2(t-\tau)}\right|_{t=t+\tau} =$$
$$=\frac{1}{k}P_2(t)-\gamma P_1(t+\tau), \qquad (7)$$
$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0.$$

Управление $u(t)$, максимизирующее функцию Гамильтона (5), имеет вид

$$u(t)=\begin{cases} u_0, \text{ если } x_1(t)\left[\frac{1}{k}P_2(t)-P_1(t)\right]>0; \\ 0, \text{ если } x_1(t)\left[\frac{1}{k}P_2(t)-P_1(t)\right]<0. \end{cases} \qquad (8)$$

Таким образом, управление является релейным, и задача построения оптимального управления сводится к нахождению точек переключения (точек включения и выключения рекламы), определяемых условием

$$x(t) = P_1(t)-\frac{1}{k}P_2(t) = 0. \qquad (9)$$

Рассмотрим вначале участок траектории $[T-\tau, T]$. Из граничных условий задачи и системы уравнений (6) следует, что в некоторой ε – окрестности точки T

$$P_1(T-\varepsilon) = P_1(T)-\dot{P}_1(T)\varepsilon+o(\varepsilon) = \rho(\tau)\varepsilon+o(\varepsilon),$$

$$P_2(T-\varepsilon) = P_2(T)-\dot{P}_2(T)\varepsilon+o(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Откуда в ε– окрестности точки T управление $u(t) = 0$.

Решая систему уравнений (6), получим

$$P_1(t)=\int_t^T \rho(\tau)d\tau,\ P_2(t)=0,\ P_3(t)=1. \qquad (10)$$

Откуда на всем отрезке $[T-\tau, T]$ $u(t)=0$.

Рассмотрим участок траектории $[0, T-\tau]$, на котором переменные $P_i(t)$ определяются системой (7) с граничными условиями (10). Опять имеем в некоторой ε– окрестности точки $T-\tau$

$$P_1(T-\tau-\varepsilon) = P_1(T-\tau)-\dot{P}_1(T-\tau)\varepsilon+o(\varepsilon) =$$
$$=P_1(T-\tau)+\rho(T-\tau)\varepsilon+o(\varepsilon),$$
$$P_2(T-\tau-\varepsilon) = P_2(T-\tau)-\dot{P}_2(T-\tau)\varepsilon+o(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Откуда в ε– окрестности точки $T-\tau$ управление $u(t)=0$. Решая систему уравнений (7) с граничными условиями (10), получим, что в некоторой окрестности точки $T-\tau$

$$P_1(t)=\int_t^T \rho(z)dz,$$
$$P_2(t)=\gamma\int_t^{T-\tau}\exp\left(\frac{t-v}{k}\right)\int_{v+\tau}^T \rho(z)dz, \qquad (11)$$
$$P_3(t)=1.$$

Точка переключения управления (точка выключения рекламы) t^*, если она существует, определяется условием (9), которое с учетом (11) дает

$$\int_{t^*}^T \rho(z)dz=\gamma\int_{t^*+\tau}^T\left(1-\exp\left(\frac{t^*+\tau-y}{k}\right)\right)\rho(y)dy. \qquad (12)$$

При $t^*\ge t$ $u(t)=0$, при $t<t^*$ $u(t)=u_0$.

Условие (12) налагает определенные ограничения на параметр γ. Во-первых, параметр $\gamma>1$. Смысл условия очевиден. Из соотношений (1) и (3) следует, что параметр γ определяет приращение капитала компании за счет рекламы. Если $\gamma\le 1$, то затраты на рекламу бессмысленны.

Если уравнение (12) имеет решение, то затраты на рекламу начинаются в некоторый момент времени t_0 и заканчиваются в момент t^* ($0\le t_0<t^*$). Покажем, что $t_0 = 0$. Для этого нужно показать, что при $t<t^*$ функция $x(t)$ (9) не меняет знак. Так как

$P_3(t)=1$ на $[0,\tau]$, то пара $P_1(t)$ и $x(t)$ удовлетворяет при $t\in\left[t_0, t^*\right]$ системе уравнений

$$\frac{dP_1(t)}{dt}=u_0x(t)-\rho(t),$$

$$k\frac{dx(t)}{dt}=(1+ku_0)x(t)-P_1(t)-k\rho(t)+ \tag{13}$$
$$+\gamma P_1(t+\tau).$$

Разрешая систему (13) относительно $x(t)$ и учитывая, что $x^*(t)=0$, получим

$$x(t)=\frac{P_1(t^*)-\gamma P_1(t^*+\tau)}{1-u_0k}\times$$
$$\times\left[\exp\left(-u_0\left(t^*-t\right)\right)-\exp\left(-\frac{t^*-t}{k}\right)\right]+$$
$$+\int_t^{t^*}\rho(z)\exp\left(-u_0(z-t)\right)dz+\frac{\gamma}{1-u_0k}\times$$
$$\times\int_t^{t^*}\dot{P}_1(t+\tau)\left[\exp\left(-u_0(z-t)\right)-\exp\left(-\frac{z-t}{k}\right)\right]dz. \tag{14}$$

Из первого уравнения (13) следует, что при всех t $\dot{P}_1(t)\le-\rho(t)$, где, по условию, $\rho(t)$ – монотонно возрастающая функция. Поэтому $x(t)$ имеет оценку сверху

$$x(t)\le\frac{P_1(t^*)-\gamma P_1(t^*+\tau)}{1-u_0k}\times$$
$$\times\left[\exp\left(-u_0\left(t^*-t\right)\right)-\exp\left(-\frac{t^*-t}{k}\right)\right]+\frac{k}{1-u_0k}\times$$
$$\times\int_t^{t^*}\rho(z)\left[-u_0\exp\left(-u_0(z-t)\right)+\frac{1}{k}\exp\left(-\frac{z-t}{k}\right)\right]dz. \tag{15}$$

Беря входящий в (14) интеграл по частям, получим

$$x(t)\le\frac{P_1(t^*)-\gamma P_1(t^*+\tau)+k\rho(t^*)}{1-u_0k}\times$$
$$\times\left[\exp\left(-u_0\left(t^*-t\right)\right)-\exp\left(-\frac{t^*-t}{k}\right)\right]+$$
$$+\frac{k}{1-u_0k}\int_t^{t^*}\dot{\rho}(z)\times$$
$$\times\left[-\exp\left(-u_0(z-t)\right)-\exp\left(-\frac{z-t}{k}\right)\right]dz. \tag{16}$$

Так как $\rho(z)$ монотонно возрастает, то $\dot{\rho}(z)\ge0$, и интегралом, входящим в (16), можно пренебречь, усиливая неравенство. Поэтому

$$x(t)\le\frac{P_1(t^*)-\gamma P_1(t^*+\tau)+k\rho(t^*)}{1-u_0k}\times$$
$$\times\left[\exp\left(-u_0\left(t^*-t\right)\right)-\exp\left(-\frac{t^*-t}{k}\right)\right]. \tag{17}$$

Наконец, точка t^* – точка выключения рекламы. Поэтому в ε – окрестности точки t^* $x\left(t^*-\varepsilon\right)<0$. Раскладывая $x\left(t^*-\varepsilon\right)$ в ряд Тейлора, получим, учитывая, что $x\left(t^*\right)=0$,

$$x\left(t^*-\varepsilon\right)=-\dot{x}\left(t^*\right)\varepsilon+o(\varepsilon),$$

а из уравнения (13)

$$k\dot{x}\left(t^*\right)=(1+ku_0)x\left(t^*\right)-P_1\left(t^*\right)-k\rho\left(t^*\right)+\gamma P_1\left(t^*+\tau\right).$$

Откуда должно выполняться условие

$$\gamma P_1\left(t^*+\tau\right)-P_1\left(t^*\right)-k\rho\left(t^*\right)>0. \tag{18}$$

Из (17) и (18) получаем, наконец, что при $t<t^*$ $x(t)<0$ и, таким образом, при $t<t^*$ точки переключения управления рекламой отсутствуют. Окончательно получаем, что оптимальное управление затратами на рекламу имеет вид

$$u(t)=\begin{cases}u_0, \text{ при } t\le t^*;\\ 0, \text{ при } t\ge t^*,\end{cases}$$

где точка переключения t^* определяется соотношением (12). Интересно отметить, что оптимальная рекламная стратегия не зависит от начального капитала компании.

Литература

1. Panjer H.H., Willmot G.E. Insurance Risk Model. Society of Actuaries. Shaumburg, 1992.
2. Ахмедова Д.Д., Терпугов А.Ф. Математическая модель функционирования страховой компании с учетом расходов на рекламу // Изв. вузов. Физика. 2001. № 1.
3. Kats V.M., Livshits K.I. Optimization of Advertising Expenses in the Functioning of an Insurance Company // Applied Stochastic Models and Information Processes. Petrozavodsk, 2002.
4. Янушевский Р.Т. Управление объектами с запаздыванием. М., 1978.