УДК 517.5

К. Тухлиев

НАИЛУЧШИЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ЗНАЧЕНИЯ СРЕДНИХ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

В работе решается ряд экстремальных задач о наилучшем среднеквадратическом приближении функций заданной на всей действительной оси $\mathbb{R}:=(-\infty,+\infty)$ целыми функциями экспоненциального типа $\sigma>0$. Вычислены точные неравенства между величиной наилучших приближений $f\in L_2(\mathbb{R})$ и интегралами, содержащими специальные модули непрерывности *m*-го порядка, связанные с оператором Стеклова, введенные в работе В. А. Абилова и Ф. В. Абиловой. Найдены точные значения средних поперечников, введенные Г. Г. Магарил-Ильяевым для классов функций $f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\left(\frac{1}{t}\int_0^t \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,d\tau\right)^{1/q}\le\Phi(t)$, где $m\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+,\ 0<q\le 2, t\in\mathbb{R}_+,\ \Omega_m(f^{(r)};\tau)$ – обобщенный модуль непрерывности *m*-го порядка производной $f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R}),\ \Phi(t)$ – произвольная возрастающая функция, $\Phi(0)=0$.

Ключевые слова: *наилучшие приближения, преобразование Фурье, модуль непрерывности m-го порядка, характеристическая функция, целая функция экспоненциального типа, средние ν-поперечники.*

Пусть Q есть центрально-симметричное множество из $L_p(\mathbb{R})$ и $\nu>0$ является произвольным числом. Тогда под средним *ν*-поперечником по Колмогорову множества Q в $L_p(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\overline{d}_\nu(Q,L_p(\mathbb{R})):=\inf\{\sup\{\inf\{\|f-\phi\|_p:\phi\in J\}:f\in Q\}:$$
$$:J\subset Lin_C(L_p(\mathbb{R})),\overline{\dim}(J,L_p(\mathbb{R}))\le\nu\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называется экстремальным.

Средним линейным *ν*-поперечником множества Q в $L_p(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(Q,L_p(\mathbb{R})):=\inf\{\sup\{\|f-\Lambda(f)\|_p:f\in Q\}:(X,\Lambda)\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X,Λ) таким, что X есть нормированное пространство, непосредственно вложенное в $L_p(\mathbb{R}); Q\subset X;\Lambda:X\to L_p(\mathbb{R})$, является линейным непрерывным оператором, для которого $I_m\Lambda\subset Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $\overline{\dim}(I_m\Lambda,L_p(\mathbb{R}))\le\nu$. Здесь $I_m\Lambda$ есть образ оператора Λ. Пару, на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной.

Величину

$$\overline{b}_\nu(Q,L_p(\mathbb{R})):=\sup\{\sup\{\rho>0:J\cap\rho BL_p(\mathbb{R})\subset Q\}:$$
$$:J\subset Lin_C(L_p(\mathbb{R})),\overline{\dim}(J,L_p(\mathbb{R}))>$$
$$>\nu,\overline{d}_\nu(J\cap BL_p(\mathbb{R}),L_p(\mathbb{R}))=1\}$$

называют средним *ν*-поперечником по Бернштейну множества Q в $L_p(\mathbb{R})$. Следует отметить, что между перечисленными экстремальными характеристиками множества Q имеют место следующие неравенства:

$$\overline{b}_\nu(Q,L_p(\mathbb{R}))\le\overline{d}_\nu(Q,L_p(\mathbb{R}))\le\overline{\delta}_\nu(Q,L_p(\mathbb{R})).$$

Пусть $\Psi_1(t)$, $t\ge0$ – произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Psi_1(0)=0$. При любых $m\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Z}_+, 0\le q\le2$ и $h\in\mathbb{R}_+$ полагаем

$$W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1)=\left\{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R}):\frac{1}{h}\int_0^h\Omega_m^q(f^{(r)};t)_2\,dt\le\Psi_1^q(h)\right\}.$$

Для произвольной центрально-симметричной множество $G\subset L_2(\mathbb{R})$ определим наилучшее приближение $A_\sigma(G)_{L_2(\mathbb{R})}=\sup\{A_\delta(f)_2:f\in G\}$,

$$\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*:=$$
$$:=\left\{1-\frac{\sin t}{t},\text{если } 0<t<t_*;1-\frac{\sin t_*}{t_*},\text{если } t\ge t_*\right\},$$

где $4.49<t^*<4.51$. Для пары $(L_2^{(r)}(\mathbb{R}),\Lambda)$, где $\Lambda:L_2^{(r)}(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$ является линейным непрерывным оператором, для которого $V_m\Lambda\in Lin_C(L_2(\mathbb{R}))$ *и* $\overline{\dim}(I_m\Lambda,L_2(\mathbb{R}))\le\nu$, полагаем

$$\mathcal{E}_\nu(G)(L_2^{(r)}(\mathbb{R}),\Lambda)):=\sup\{\|f-\Lambda f\|_2:f\in G\}.$$

В силу теоремы 2.1 из [1] вытекает следующая

теорема 1. Если для всех $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<h\le\pi/\sigma$, $m\in\mathbb{N}$, $0<q\le2$ мажоранта Ψ_1 удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1(\pi/\sigma)}\right)^q\ge\frac{\pi}{\sigma h}\cdot\left\{\int_0^{\sigma h}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)_*^{mq}dt\right\}\cdot$$
$$\cdot\left\{\int_0^{\pi}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq}dt\right\}^{-1},$$

то при $\sigma=\pi\nu\ (\nu>0), r\in\mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$\overline{\mu}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1),L_2(\mathrm{R})) = A_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1))_{L_2(\mathrm{R})} =$

$\mathcal{E}_{\nu\pi}(W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1);(L_2(\mathrm{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*))_{L_2(\mathrm{R})} =$

$$= (\pi\nu)^{-r}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}\Psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

где $\overline{\mu}_\nu(\cdot)$ – любой из перечисленных выше средних ν-поперечников. При этом пара $(L_2(\mathrm{R}),\Lambda_{\nu\pi}^*)$, где $\Lambda_{\nu\pi}^*$ определяется из условия $F(\Lambda_{\nu\pi}^* f,\cdot) = X_{\nu\pi}(\cdot)\cdot F(f,\cdot)$ (F-преобразование Фурье в $L_2(\mathrm{R}), X_{\nu\pi}$ – характеристическая функция интервала $(-\nu\pi,\nu\pi)$), будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1),L_2(R))$, а пространство $B_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1),L_2(\mathrm{R}))$.

Задача изучения поведения величин наилучших приближений $A_\sigma\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})}$, где $r\in\mathrm{N}$, $s=0,1,...,$ r–1 на различных классах целых функций, определяемых заданной мажорантой рассмотрена в работах [2]. Здесь аналогичная задача решается для введенная нами класса целых функций $W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1)$.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1; $s=0,1,...,r-1$, где $r\in N$ и $0<\nu<\infty$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$sup\left\{A_{\nu\pi}\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})} : f\in W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1)\right\} =$$

$$(\pi\nu)^{-s}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}\Psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (1)$$

Доказательство. Полагая, в равенстве теореме 2.2 из [1], $t=\pi/\sigma$ и подбирая число $\nu\in(0,\infty)$ так, чтобы $\sigma=\nu\pi$ и с учетом определения класса $W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1)$, имеем оценку сверху

$$sup\left\{A_{\nu\pi}\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathrm{R})} : f\in W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1)\right\} \le$$

$$(\pi\nu)^{-s}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}\Psi_1(1/\nu). \quad (2)$$

Для получения оценки снизу выражения, записанного в левой части равенства (1), рассмотрим целую функцию

$$f_{\varepsilon_*}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\frac{sin(\sigma+\varepsilon^*)x}{x} - \frac{sin\sigma x}{x}\right\}, \varepsilon_* > 0$$

экспоненциального типа $\sigma+\varepsilon^*$, рассмотренную нами при доказательстве теоремы 2.1 из [1]. Если полагать $\varepsilon_* = \nu\pi\varepsilon$, то мы имеем

$$\sigma+\varepsilon_* = \nu\pi(1+\varepsilon) = \sigma_*. \quad (3)$$

Поскольку по теореме Винера-Пэли

$$\|\ f_{\varepsilon_*}\ \|_{L_2(\mathrm{R})}^2 = 2\int_\sigma^{\sigma+\varepsilon_*}|F(f_{\varepsilon_*,\tau})|^\alpha\,d\tau = 2\varepsilon_*, \quad (4)$$

то, как следует из равенства

$$\rho_* = \sigma_*^{-s}\left(\frac{1}{\sigma_* h}\int_0^{\sigma_* h}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}\Psi_1(h) \quad (5)$$

и формул (3) и (4), целая функция

$$\tilde{f}_{\varepsilon_*}(x) := \frac{\rho_*}{\sqrt{2\varepsilon_*}}f_{\varepsilon_*}(x) \quad (6)$$

является элементом шара $B_{\sigma_*}(\rho_*) = \{g_{\sigma_*}\in B_{\sigma_*,2} : \|\ g_{\sigma_*}\ \|_{L_2(\mathrm{R})} \le \rho\}$, который, как легко проверить, принадлежит классу $W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1)$.

Используя неравенство $A_\sigma(f_\varepsilon^{r-s})_{L_2(\mathrm{R})} \ge \sqrt{2\varepsilon}\sigma^{r-s}$, доказанные нами в [1], и соотношение (6), сразу получаем

$$A_{\nu\pi}((\tilde{f}_{\varepsilon_*})^{r-s})_{L_2(\mathrm{R})} \ge \rho_*(\pi\nu)^{(r-s)}. \quad (7)$$

Учитывая неравенство (7), равенство (5) и (3), имеем

$$\sup\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_2 : f\in W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1)\} \ge$$

$$\ge A_{\nu\pi}((\tilde{f}_{\varepsilon_*})^{(r-s)})_{L_2(\mathrm{R})} \ge \frac{1}{\nu^s(1+\varepsilon)^r}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\pi(1+\varepsilon)}\cdot\int_0^{\pi(1+\varepsilon)}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}\Psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (8)$$

В неравенстве (8) от ε зависит только правая часть. Поэтому вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon>0$, от ее правой части будем иметь

$$\sup\{A_{\nu\pi}(f^{(r-s)})_2 : f\in W_q^{(r)}(\Omega_m;\Psi_1)\} \ge$$

$$\frac{1}{\nu^s}\cdot\left(\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{mq}dt\right)^{-1/q}\Psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (9)$$

Сопоставляя оценку сверху (2) и оценку снизу (9), приходим к требуемому равенству (1). Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Тухлиев К. О наилучших приближениях целыми функциями в пространстве L_2 (R). I // Известия АН РТ, отд. физ.-мат., хим., геол. и тех. н., 2013, № 3 (152), С. 19–29.
2. Вакарчук С. Б. О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси II // Укр. матем. вісник, 2012, Т. 9, № 4, С. 578–602.

Тухлиев К., кандидат физико-математических наук, доцент.
Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова.
Ул. Мавлонбекова, 1, Худжанд, Республика Таджикистан, 735700.
E-mail: kamaridin.t54@mail.ru

Материал поступил в редакцию 20.12.2014.

K. Tukhliev

BEST MEAN SQUARE APPROXIMATION BY ENTIRE FUNCTIONS AND VALUES OF THE AVERAGE WIDTHS OF SOME FUNCTIONAL CLASSES

We solve number of extremal problems on the best mean square approximation of functions defined on the whole line $\mathrm{R} := (-\infty, +\infty)$ by entire functions of exponential type $\sigma > 0$. Calculated exact inequalities between the best approximations of the value of $f \in L_2(\mathrm{R})$ and integrals containing special moduli of continuity of the m-th order associated with the operator Steklov introduced in V. A. Abilova and F. V. Abilovoy. For the widths were calculated the exact mean values formulated by G. G. Magaril-Ilyaev for the classes functions $f \in L_2^{(r)}(\mathrm{R})$ satisfying the condition $\left(\frac{1}{t}\int_0^t \Omega_m^q(f^{(r)};\tau)\,d\tau\right)^{1/q} \le \Phi(t)$, where $m \in \mathrm{N}, r \in \mathrm{Z}_+,\ 0 < q \le 2,\ t \in \mathrm{R}_+,\ \Omega_m(f^{(r)};\tau)$ – generalized modulus of continuity *m* order derivative $f \in L_2^{(r)}(\mathrm{R}),\ \Phi(t)$ – the arbitrary increasing function $\Phi(0) = 0$. Similar problems for periodic functions in the space $L_2[0, 2\pi]$ previously considered works of V. A. Abilova, F. I. Abilovoy, S. B. Vakarchuk, M. Sh. Shabozova and others.

Key words: *the best approximation, Fourier transform, modulus of continuity of m-order, the characteristic function, entire function of exponential type, the mean of v-widths.*

References

1. Tukhliev K. O nailuchshih priblizhenijah celymi funkcijami v prostranstve L_2 (R). I [Best approximations of entire functions in the space L_2 (R). I]. *Izvestiya AN RT, otd. fiz.-mat., him., geol. i teh. n.*, 2013, no. 3 (152), pp. 19–29 (in Russian).
2. Vakarchuk S. B. O nekotrykh ekstremal'nykh zadachakh teorii approksimatsii funktsiy na veshchestvennoy osi. II [Some extreme problems in the theory of approximation of functions on real axis. II]. *Ukr. matem. visnik*, 2012, vol. 9, no. 4, pp. 578–602 (in Russian).

Khujand State University named B. Gafurov.
Ul. Mavlonbekova, 1, Khujand, Respublika Tajikistan, 735700.
E-mail: kamaridin.t54@mail.ru