УДК 530.145:530.12; 537.8:

О. Д. Азоркина

ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТИВНОГО ЛАГРАНЖИАНА N=1 СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ПОЛЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Эффективное действие является центральным понятием при изучении многочисленных аспектов квантовых моделей теории поля. Точное определение эффективного лагранжиана теории гарантирует точное решение соответствующей модели квантовой теории и в общем случае невозможно. В связи с этим задача вычисления эффективного действия в настоящее время рассматривается как самостоятельное направление в рамках квантовой теории. Следовательно, возникает необходимость разрабатывать суперполевые методы построения эффективного действия и совершенствовать уже существующие. В данной работе предлагается метод построения однопетлевого эффективного действия N=1 суперсимметричных полевых теорий, позволяющий находить суперполевой эффективный лагранжиан в виде разложения по суперковариантным производным фоновых суперполей. В качестве примера применения общей техники проводится вычисление низкоэнергетического действия N=1 суперсимметричной модели Янга-Миллса.

Ключевые слова: *суперсимметрия, эффективное действие, модель Янга-Миллса.*

Введение. Понятие эффективного действия является центральным при исследовании многих аспектов моделей квантовой теории поля. Причем построение эффективного действия в различных полевых моделях для решения разнообразных физических задач основывается на использовании аналогичных приближенных схем вычисления. Точное определение эффективного лагранжиана гарантирует точное решение соответствующей квантовой модели теории и в общем случае невозможно. В связи с этим проблема нахождения эффективного действия сейчас рассматривается как самостоятельное направление в рамках квантовой теории [1–6]. Только в сравнительно недавнее время был развит суперполевой подход изучения эффективного действия, поскольку оказалось, что при непосредственном применении методов развитых для стандартной квантовой теории поля к суперсимметричным моделям возникают существенные трудности. Данные проблемы связаны с тем фактом, что в стандартной квантовой теории поля эффективные потенциалы исследуются при постоянных значениях скалярных полей и вычисления базируются на стандартных методах [7]. При попытке же рассматривать суперполевое эффективное действие на постоянных значениях киральных и антикиральных скалярных полей оказывается, что оно исчезает вследствие известных свойств интеграла Березина [8, 9]. Таким образом, необходимо рассматривать суперполевое эффективное действие для скалярных полей, постоянных в пространстве-времени, но сохраняющих произвольную зависимость от грассмановских антикоммутирующих координат θ и $\bar{\theta}$. Это означает, что для определения эффективного лагранжиана нужно рассматривать пропагатор теории во внешних суперполях, нетривиально зависящих от θ и $\bar{\theta}$ (как показано в работах [10, 11]).

Следовательно, существует необходимость разрабатывать суперполевые методы построения эффективного действия и совершенствовать их. Именно данному вопросу посвящена эта работа, а также изучению эффективного действия в однопетлевом приближении для N=1 модели Янга-Миллса, на примере которой вследствие ее простоты можно проследить ряд закономерностей алгоритма вычисления.

Обобщенная техника вычисления. В общем случае в однопетлевом приближении эффективное действие определяется соотношением вида [10].

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} Tr \ln H. \tag{1}$$

Здесь Tr есть функциональный суперслед, определенный следующим образом:

$$TrA = \int d^4x d^4\theta A\left(x,\theta,\bar{\theta};x',\theta',\bar{\theta}'\right)\Big|_{\left(x'=x,\theta'=\theta,\bar{\theta}'=\bar{\theta}\right)}$$

и $A\left(x,\theta,\bar{\theta};x',\theta',\bar{\theta}'\right)$ – ядро оператора A; дифференциальный оператор H, действующий на суперполя, обозначаем как

$$H = W + A^{\alpha}D_{\alpha} + \bar{A}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}} + BD^2 + \bar{B}\bar{D}^2 + X = H\left(z,D_z\right), \tag{2}$$

где $z \equiv (z^A) \equiv (z^{\alpha},\theta_{\alpha},\bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ – координаты суперпространства, $D_z \equiv (\partial_{\alpha},D_{\alpha},\bar{D}_{\dot{\alpha}})$ – суперпроизводные. Явный вид оператора H определяется структурой суперполевого действия рассматриваемой теории.

Представим эффективное действие $\Gamma^{(1)}$ в виде интеграла по собственному времени

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} Tr \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{isH}. \tag{3}$$

Здесь обозначим через $U(x,\theta,\bar{\theta};x',\theta',\bar{\theta}'|s)$ – ядро оператора e^{isH}. Общая структура эффективного действия есть интеграл по суперпространству

$$\Gamma^{(1)} = \int d^8 z L_{eff}, \tag{4}$$

где эффективный лагранжиан записывается в форме

$$L_{eff} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} U(x,\theta,\bar{\theta};x',\theta',\bar{\theta}'|s)\Big|_{(x'=x,\theta'=\theta,\bar{\theta}'=\bar{\theta})}. \tag{5}$$

Таким образом, задача сводится к приближенному вычислению ядра U. Будем рассматривать выражение

$$Tre^{isH} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int d^4\theta_1 d^4\theta_2 \int d^4 x \delta_{12}^4 e^{-ipx} e^{isH} e^{ipx} \delta_{12}^4 \tag{6}$$

и используем тождество вида

$$e^{-ipx} \vec{\partial}_\alpha e^{ipx} = \vec{\partial}_\alpha + ip_\alpha, \tag{7}$$

где стрелка обозначает действие оператора на все функции справа от него. Применим тождество (7) к оператору e^{isH} и получим выражение

$$e^{-ipx} e^{isH(z,D_z)} e^{ipx} = e^{isH(z,\partial_\alpha + ip_\alpha, \tilde{D})} 1,$$

здесь происходит замена $\partial_\alpha \to \partial_\alpha + ip_\alpha$, $D \to \tilde{D}$. Не трудно показать, что $e^{isH(z,\partial_\alpha + ip_\alpha,\tilde{D})}$ можно представить в форме произведения двух сомножителей

$$e^{isH(z,\partial_\alpha + ip_\alpha,\tilde{D})} = e^{-isp^2} e^{is\hat{H}},$$

и теперь оператор $H(z,\partial_\alpha + ip_\alpha,\tilde{D})$ запишется в форме

$$H(z,\partial_\alpha + ip_\alpha,\tilde{D}) = -p^2 + \hat{H}. \tag{8}$$

Следовательно, для эффективного действия получаем

$$\Gamma^{(1)} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-isp^2} \int d^4 x \int d^4\theta_1 d^4\theta_2 \delta_{12}^4 e^{is\hat{H}} \delta_{12}^4. \tag{9}$$

Представим оператор $e^{is\hat{H}}$ в виде разложения в ряд по суперковариантным производным

$$e^{is\hat{H}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(is)^n}{n!} (W + 2ip^\alpha \partial_\alpha + A^\alpha \tilde{D}_\alpha + ...)^n \tag{10}$$

и будем рассматривать интересующий нас порядок *n*, учитывая, что интегралы по импульсу являются интегралами гауссова типа и только при четных значениях *n* не обращаются в нуль.

При разложении ядра по собственному времени имеем

$$U(x,\theta,\bar{\theta};x',\theta',\bar{\theta}'|s)\Big|_{(x'=x,\theta'=\theta,\bar{\theta}'=\bar{\theta})} = \sum_{n=0}^\infty (is)^{n-2} A_n(x,\theta,\bar{\theta}), \tag{11}$$

где A_n - коэффициенты разложения. Тогда эффективный лагранжиан определяется рядом вида

$$L_{eff} = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^\infty A_n(x,\theta,\bar{\theta}) \int_0^\infty d(is)(is)^{n-3}. \tag{12}$$

Очевидно, что интеграл по собственному времени будет расходиться на нижнем пределе при *n* = 0, 1, 2, что соответствует в квантовой теории поля ультрафиолетовой расходимости. Кроме этого данный интеграл расходится и на верхнем пределе – инфракрасные особенности, которые носят искусственный характер и обусловлены тем, что ядро рассматривается как разложение в ряд и интегрируется почленно. Для придания смысла расходящимся интегралам вводим процедуру регуляризации.

Регуляризация расходимостей. Для регуляризации инфракрасных особенностей вводим сомножитель $e^{-im^2 s}$ и будем рассматривать исходный интеграл как предел при $m^2 \to 0$. До тех пор пока $m^2 \neq 0$, инфракрасных особенностей нет. Для устранения ультрафиолетовых расходимостей определяем эффективный лагранжиан (12) как предельное значение при $\varepsilon \to +0$ регуляризованного выражения

$$L_{eff}^{(\varepsilon)} = \frac{i}{2}\mu^{2\varepsilon} \times \int_0^\infty \frac{d(is)}{(is)^{1-\varepsilon}} U(x,\theta,\bar{\theta};x',\theta',\bar{\theta}'|s)\Big|_{(x'=x,\theta'=\theta,\bar{\theta}'=\bar{\theta})} e^{-im^2 s}, \tag{13}$$

где μ – произвольный параметр размерности массы, вводимый для того, чтобы размерность (13) совпадала с размерностью исходного эффективного лагранжиана (5).

Исследуем структуру регуляризованного лагранжиана $L_{eff}^{(\varepsilon)}$. Подставляем в (13) разложение ядра в ряд по s (11) и получаем соотношение

$$L_{eff}^{(\varepsilon)} = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^\infty \mu^{2\varepsilon} A_n(x,\theta,\bar{\theta}) \int_0^\infty d(is)(is)^{n-3+\varepsilon} e^{-im^2\varepsilon}. \tag{14}$$

Возникшие интегралы по собственному времени вычисляются явно

$$\int_0^\infty d(is)(is)^{n-3+\varepsilon} e^{-im^2 s} = (m^2)^{(2-n-\varepsilon)} \Gamma(n-2+\varepsilon), \tag{15}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. В результате для эффективного лагранжиана получаем выражение

$$L_{eff}^{(\varepsilon)} = \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\mu^{2\varepsilon}A_n(x,\theta,\bar{\theta})(m^2)^{2-n-\varepsilon}\Gamma(n-2+\varepsilon). \qquad (16)$$

Как было отмечено выше, расходимости при $\varepsilon \to 0$ отвечают значениям n = 0, 1, 2. Обозначим

$$L_{div}^{(\varepsilon)} = \frac{i}{2}\mu^{2\varepsilon}\Big[A_0(m^2)^{2-\varepsilon}\Gamma(\varepsilon-2) +$$
$$+A_1(m^2)^{1-\varepsilon}\Gamma(\varepsilon-1) + A_2(m^2)^{-\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)\Big]. \qquad (17)$$

До тех пор пока $\varepsilon \neq 0$, никаких расходимостей не возникает. Выделяем в явном виде члены сингулярные при $\varepsilon \to 0$. Для этого будем использовать свойство гамма-функции [12]

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1). \qquad (18)$$

Теперь не трудно получить следующее

$$(\varepsilon-2)\Gamma(\varepsilon-2) = \Gamma(\varepsilon-1),$$
$$(\varepsilon-1)\Gamma(\varepsilon-1) = \Gamma(\varepsilon)\,.$$

Значит, имеем

$$\Gamma(\varepsilon-1) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\varepsilon-1},$$
$$\Gamma(\varepsilon-2) = \frac{\Gamma(\varepsilon-1)}{\varepsilon-2} = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{(\varepsilon-2)(\varepsilon-1)}.$$

Поэтому расходящаяся часть $L_{div}^{(\varepsilon)}$ примет вид

$$L_{div}^{(\varepsilon)} = \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}\frac{i}{2}\times$$
$$\times\left[A_0\frac{m^4}{(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)} - A_1\frac{m^2}{1-\varepsilon} + A_2\right]\Gamma(\varepsilon). \qquad (19)$$

Кроме того, из тождества (18) следует, что

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\Gamma(\varepsilon+1)}{\varepsilon}. \qquad (20)$$

Следовательно, выражение (19) можно представить в следующей форме

$$L_{div}^{(\varepsilon)} = \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\varepsilon}\frac{i}{2\varepsilon}\times$$
$$\times\left[A_0\frac{m^4}{(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)} - A_1\frac{m^2}{1-\varepsilon} + A_2\right]\Gamma(\varepsilon+1), \qquad (21)$$

и, устремив $\varepsilon \to +0$ во всех членах, кроме $\frac{1}{\varepsilon}$. Это позволяет выделить только расходящийся вклад, т. е.

$$L_{div} = \frac{i}{2\varepsilon}\left[A_0\frac{m^4}{2} - A_1 m^2 + A_2\right], \qquad (22)$$

где учтено, что $\Gamma(1) = 1$.

Для определения конечного эффективного лагранжиана $L_{eff}^{(R)}$ необходимо к эффективному лагранжиану (16) добавить контрчлен

$$L_{eff}^{(R)} = \Big[L_{eff}^{(\varepsilon)} - L_{div}\Big]_{\varepsilon=0}. \qquad (23)$$

Выражение (23) не содержит ультрафиолетовых расходимостей. Отметим, что для явного вычисления контрчлена (22) необходимо провести прямое вычисление коэффициентов A_0, A_1, A_2 разложения ядра в ряд по собственному времени для конкретной модели теории поля.

N=1 суперсимметричная модель Янга-Миллса. В данном пункте рассмотрим применение приведенной выше техники для вычисления эффективного лагранжиана N=1 суперсимметричной теории поля Янга-Миллса в однопетлевом приближении. Исходное действие для данной модели есть [13]

$$S = \frac{1}{g^2}tr\int d^4x d^2\theta W^2, \qquad (24)$$

где W^{α} - киральная напряженность поля.

Дифференциальный оператор H, действующий на суперполя для модели Янга-Миллса, имеет вид [14])

$$H = WiW^{\alpha}\nabla_{\alpha} - i\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}, \qquad (25)$$

где $\nabla_{\alpha}, \bar{\nabla}^{\dot{\alpha}}$ – стандартные ковариантные производные Янга-Миллса. Применяем тождество (7) и учитываем, что

$$\tilde{\nabla}_{\alpha} = \nabla_{\alpha} - (\bar{\theta}\sigma^a)_{\alpha}p_a, \qquad (26)$$
$$\tilde{\bar{\nabla}}^{\dot{\alpha}} = \bar{\nabla}^{\dot{\alpha}} + (\theta\sigma^a)^{\dot{\alpha}}p_a. \qquad (27)$$

Получаем выражение для нового оператора $\tilde{H}$:

$$\tilde{H} = W + 2ip^a\partial_a - iW^{\alpha}\nabla_{\alpha} - i\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{\nabla}^{\dot{\alpha}} +$$
$$+iW^{\alpha}(\bar{\theta}\sigma^a)_{\alpha}p_a - i\bar{W}_{\dot{\alpha}}(\theta\sigma^a)^{\dot{\alpha}}p_a. \qquad (28)$$

Далее следуем схеме предложенного метода и рассматриваем оператор $e^{is\tilde{H}}$ в виде разложения по ковариантным производным суперполей при n = 0, 1, 2, 3, 4. Благодаря известному равенству $\delta_{12}^4 D^2\bar{D}^2\delta_{12}^4 = 16\delta_{12}^4$ при вычислении интеграла по θ от выражения между дельта-функциями остаются только слагаемые, в которых есть сомножитель

$D^2\bar{D}^2$, остальные же члены обращаются в нуль, а значит, при $n = 0, 1, 2, 3$ вкладов не наблюдается. Таким образом, будем определять вклады при $n = 4$:

$$\delta_{12}^4 \frac{(is)^4}{24}(W + 2ip^a\partial_a - iW^\alpha\nabla_\alpha - i\bar{W}_{\dot\alpha}\bar{\nabla}^{\dot\alpha} + \\ + iW^\alpha(\bar\theta\sigma^a)_\alpha p_a - i\bar{W}_{\dot\alpha}(\theta\sigma^a)^{\dot\alpha} p_a)^4 \delta_{12}^4. \tag{29}$$

После проведения необходимых преобразований эффективный лагранжиан принимает вид

$$L_{eff} = \frac{i}{2}\int_0^\infty\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{isp^2}(is)^4 W^2\bar{W}^2. \tag{30}$$

Вычисляем интеграл по импульсам, и так как это интеграл гауссова типа, то его нетрудно вычислить явно. Аналогично схеме (13) – (23) проводим процедуру регуляризации и получаем для регуляризованного лагранжиана выражение

$$L_{eff}^{(\varepsilon)} = \frac{i}{2}\frac{i}{(4\pi)^2}\mu^{2\varepsilon}W^2\bar{W}^2(m^2)^{(-2-\varepsilon)}\Gamma(2+\varepsilon). \tag{31}$$

Используем свойство дельта-функции (20) и записываем эффективный лагранжиан модели в форме

$$L_{eff}^{(R)} = \frac{1}{2(4\pi)^2}\left[\frac{\mu^{2\varepsilon}}{(m^2)^{(2+\varepsilon)}}\frac{W^2\bar{W}^2}{2+\varepsilon}\Gamma(\varepsilon+1)\right]_{\varepsilon=0} = \\ = \frac{-1}{64\pi^2 m^4}W^2\bar{W}^2. \tag{32}$$

При возникновении расходимостей для их аннулирования в выражение (32) вводят контрчлен L_{div}, устраняющий расходящиеся вклады. Но для данного случая введение контрчленов не требуется, так как в однопетлевом приближении N=1 суперсимметричная теория Янга-Миллса является конечной.

Таким образом, для N=1 суперсимметричной теории поля Янга-Миллса получили в однопетлевом приближении низкоэнергетический эффективный лагранжиан по алгоритму предложенной техники.

Список литературы

1. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля (в 2 т.). М.: Мир, 1984.
2. Buchbinder I. L., Odinntsov S. D., Shapiro I. L. Effective action in quantum gravity. IOP Publisching, Bristol and Philadelphia, 1992.
3. Henneaux M., Teitelboim C. Quantization of gauge systems. Prinston Univ. Press, 1992.
4. Zinn-Justin J. Quantum field theory and critical phenomena. Clarendon Press, Oxford, 1994.
5. Weinberg S. The quantum theory of fields // vol. 2: Modern applications, Cambridge Univ. Press. 1996.
6. Bertlmann R. A. Anomalies in quantum field theory. Clarendon Press, Oxford, 1996.
7. Coleman S., Weinberg E. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking // Phys. Rev. D. 10 (973). vol.7. no.6. pp.1888–1910.
8. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983. 208 с.
9. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986. 318 с.
10. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., Yarevckaya J. V. Supersymmetric effective potential superfield approach // Nucl. Phys. B. 1994. vol. 411. no. 4. pp. 665–692.
11. Бухбиндер И. Л., Кузенко С. М., Яревская Ж. В. Суперсимметричный эффективный потенциал: суперполевой подход // Я. Ф. 1993. т. 56. вып. 5. с. 202–216.
12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
13. Введение в супергравитацию / под ред. С. Феррфры, Дж. Тейлора. М.: Мир, 1985. 69 с.
14. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M. Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity. IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1998.

Азоркина О. Д., кандидат физико-математических наук, доцент.
Томский государственный педагогический университет.
Ул. Киевская 60, Томск, Россия, 634061.
E-mail: azorkina@tspu.edu.ru

Материал поступил в редакцию 05.05.2014.

O. D. Azorkina

TECHNIQUE OF COMPUTING THE LOW-ENERGY EFFECTIVE LAGRANGIAN N = 1 OF SUPERSYMMETRIC FIELD MODELS

The notion of effective action is central for research of many aspects of quantum field theory models. The exact definition of the effective Lagrangian guarantees the exact solution of the corresponding quantum theory model and in the general case it is not possible. Thereby, the problem of effective action finding is now considered as an independent direction within the framerwork of the quantum theory. Consequently, there is a need to develop superfield methods of constructing effective action and improve the already existing. This paper proposes the method for constructing of the one-loop effective action of N = 1 of supersymmetric field theories which allows to find superfield effective Lagrangian as an expansion in supercovariant derivative background superfields. As an example of the general technique application we calculate the low-energy action of N = 1 supersymmetric Yang-Mills theory.

Key words: *effective action, supersymmetric field theory, Yang-Mills model.*

References

1. Itsikson K., Zyuber Zh.-B. *Kvantovaya teoriya polya* [The quantum theory of a field]. Moscow, Mir Publ., 1984 (in Russian).
2. Buchbinder I. L., Odinntsov S. D., Shapiro I. L. *Effective action in quantum gravity.* IOP Publisching, Bristol and Philadelphia, 1992.
3. Henneaux M., Teitelboim C. *Quantization of gauge systems*. Prinston Univ. Press, 1992.
4. Zinn-Justin J. *Quantum field theory and critical phenomena*. Clarendon Press, Oxford, 1994.
5. Weinberg S. *The quantum theory of fields.* Vol.2: Modern applications, Cambridge Univ. Press. 1996.
6. Bertlmann R. A. *Anomalies in quantum field theory.* Clarendon Press, Oxford, 1996.
7. Coleman S., Weinberg E. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Phys. Rev. D,* 10 (973), vol. 7, no. 6, pp.1888–1910.
8. Berezin F. A. *Vvedenie v algebru i analis s anticommutiruyushchimi ptremennymi* [Introduction in algebra and the analysis with anticommuting variables]. Moscow, MGU Publ., 1983. 208 p. (in Russian).
9. Berezin F. A. *Metod vtorichnogo kvantovaniya* [Method of secondary quantization]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 318 p. (in Russian).
10. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., Yarevckaya J. V. Supersymmetric effective potential superfield approach. *Nucl. Phys. B,* 1994, vol. 411, no.4, pp. 665–692.
11. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M., Yarevskaya J. V. *Supersimmetrichnyy effectivnyy potentsial: superpolevoy podkhod* [Supersymmetric effective potential superfield approach]. Ya. F., 1993, vol. 56, no. 5, pp. 202–216 (in Russian).
12. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, the sums, numbers and products]. Moscow, Nauka Publ., 1971 (in Russian).
13. *Vvedenie v supergravitatsiyu* [Introduction in supergravitation], gl. red., C. Ferrfry, Dz. Teylor. Moscow, Mir Publ., 1985. 69 p. (in Russian).
14. Buchbinder I. L., Kuzenko S. M. *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity.* IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1998.

Tomsk State Pedagogical University.
Ul. Kievskaya, 60, Tomsk, Russia, 634061.
E-mail: azorkina@tspu.edu.ru